

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.12.01

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

**КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТР
КИНЕТИЧЕСКОГО СМЕШИВАНИЯ В МОДЕЛЯХ С
ЗЕРКАЛЬНОЙ СКРЫТОЙ МАССОЙ**

Научный руководитель

д.ф-м.н., проф.

Студент

_____ М. Ю. Хлопов

_____ К. М. Зуев

Москва 2022

Содержание

Введение	3
1 Модель зеркального сектора	3
2 Уравнения, описывающие эволюцию зеркального сектора	4
2.1 Случай пренебрежения массой электрона	4
2.2 Случай учета массы электрона и усреднения по сечению, скорости Мёллера и передаваемой энергии	5
2.2.1 Решение уравнения эволюции зеркального сектора в случае усреднения по сечению, скорости Мёллера и передаваемой энергии	6
2.3 Случай учета массы электрона и усреднения по сечению и скорости Мёллера	12
2.3.1 Решение уравнения эволюции зеркального сектора в случае усреднения по сечению и скорости Мёллера	12
Заключение	14

Введение

Скрытая масса — это одна из форм материи, которая по современным расчетам составляет порядка четверти массы-энергии всей Вселенной. Гипотеза о существовании такой формы материи возникла при попытке объяснения проблемы скрытой массы в эффектах аномально высокой скорости вращения внешних областей галактики и гравитационного линзирования.

Одной из моделей, предсказывающих существование скрытой массы, является так называемая модель зеркальной скрытой массы. Согласно данной модели для каждой известной науке элементарной частицы должен существовать «зеркальный» партнер, т.е. частица, обладающая правой киральностью. Предполагается также кинетическое смешивание частиц обычного сектора с зеркальным, хотя, в общем случае, введение зеркального сектора этого не требует.

Киральность для дираковских частиц определяется как собственные значения матрицы Дирака γ^5 , которые, как известно из квантовой теории поля, равны ± 1 . Данная величина показывает, по какому представлению группы Пуанкаре преобразуется волновая функция частицы.

Векторные калибровочные теории с безмассовыми фермионами Дирака проявляют киральную симметрию, т.е. для таких фермионов вращение левой и правой частей независимо друг от друга не имеет никакой теоретической разницы. В этом случае киральности равносильна спиральность — проекция спина частицы на направление ее движения. Как и для более общего понятия киральности, спиральность может быть левой и правой. В экспериментах наблюдаются частицы с обоими видами спиральности.

В случае, если рассматривается фермион Дирака, имеющий массу, киральность и спиральность следует различать, поскольку такие частицы не проявляют киральной симметрии в силу наличия массового члена в лагранжиане.

Идея состоит в том, чтобы ввести скрытый (зеркальный) сектор частиц и сил, точно дублируя известные частицы и взаимодействия, за исключением того, что в зеркальном секторе киральность меняется на противоположную. Подобный подход позволяет восстановить симметрию слабых взаимодействий, поскольку P-преобразование будет переводить левые частицы в зеркальные правые. В такой теории зеркальные частицы — стабильные и массивные — могут служить кандидатами на роль скрытой массы.

Простейшей возможностью обнаружить взаимодействие частиц обычного сектора с зеркальным является кинетическое смешивание фотонов и зеркальных фотонов. Лагранжиан такого взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{mix} = \frac{\epsilon}{2} F^{\mu\nu} F'_{\mu\nu},$$

где ϵ — параметр кинетического смешивания, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu$.

Целью настоящей работы является уточнение космологических ограничений на параметр кинетического смешивания частиц наблюдаемого сектора с частицами зеркального сектора. Данная тема является актуальной по состоянию на сегодняшний день. В экспериментах, посвященных изучению аннигиляции ортопозитрония [1], ожидается, что в случае, когда в результате эксперимента отсутствуют продукты аннигиляции, существует вероятность того, что они перешли в зеркальный сектор. По этой причине строгая оценка значения параметра кинетического смешивания ϵ , позволяющее экспериментально зафиксировать данный переход, является особенно важной. Также интерес представляет расхождение значения параметра кинетического смешивания, представленного в [2], со значением, представленным в [3]. Коррекция данных ограничений важна для интерпретации результатов уже проведенных экспериментов в рамках данной тематики, а также для будущих экспериментов.

1 Модель зеркального сектора

В основе модели зеркального вещества лежит, как уже было сказано выше, предположение о том, что помимо нашей Вселенной существует так называемый зеркальный сектор, состоящий из частиц, киральность которых является, в отличие от наблюдаемых элементарных частиц, правой.

Предполагается, что в условиях ранней Вселенной существовала асимметрия между температурой T обычного сектора и температурой T' зеркального сектора.

Ограничение отношения данных температур, обусловленное первичным нуклеосинтезом, имеет вид $T'/T \lesssim 0.6$. Кроме того, анализы, базирующиеся на основе математического моделирования реликтового излучения с применением численных методов, устанавливают другое его значение: $T'/T \lesssim 0.3$ [2].

В [2] утверждается, что, согласно выстраиваемой модели, существует ограничение, заключающееся в том, что зеркальный сектор не может находиться в состоянии термодинамического равновесия с обычным сектором. Численная оценка, приведенная также в [2], имеет вид $\epsilon \lesssim 3 \times 10^{-8}$.

2 Уравнения, описывающие эволюцию зеркального сектора

Кинетическое смешивание фотонов может заполнить зеркальный сектор в ранней Вселенной посредством процесса $e^+e^- \rightarrow e'^+e'^-$, перехода электронов и позитронов из обычного сектора в зеркальный. Это приводит к увеличению плотности энергии ρ' в зеркальном секторе, эволюция которой описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = n_{e^+} n_{e^-} \langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle, \quad (1)$$

где \mathcal{E} — энергия, передаваемая зеркальному сектору в процессе, v_{Mol} — скорость Мёллера. В дальнейшем в уравнении (1) удобнее перейти к величине ρ'/ρ , чтобы исключить временную зависимость вследствие расширения Вселенной, а также использовать связь

$$t = 0.3g^{-1/2} \frac{M_{Pl}}{T^2}, \quad (2)$$

где $g = 10.75$ и $M_{Pl} \simeq 1.22 \times 10^{22}$ МэВ — масса Планка.

2.1 Случай пренебрежения массой электрона

При использовании статистики Максвелла вид уравнения (1) упрощается за счет пренебрежения в пределе массой электрона. Таким образом, имеем релятивистский предел рассматриваемой модели. В этом случае

$$n_{e^+} \simeq n_{e^-} \simeq \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} T^3,$$

а выражение для $\langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle$ имеет вид

$$\langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle = \frac{2\pi\alpha^2 \epsilon^2}{3T},$$

где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. С учетом данного упрощения уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial \rho'/\rho}{\partial T} = -\frac{A}{T^2}, \quad (3)$$

где

$$A = \frac{27\zeta(3)^2 \alpha^2 \epsilon^2 M_{Pl}}{\pi^5 g \sqrt{g}}.$$

В достаточно хорошем приближении радиационная составляющая зеркального сектора состоит из зеркальных электронов, позитронов и фотонов. Это приводит к значению $g' = 11/2$ и, следовательно, к выражению для перехода от соотношения плотностей зеркального и обычного секторов к соотношению их температур:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{g'}{g} \left(\frac{T'}{T} \right)^4, \quad (4)$$

где $g'/g = 22/43$.

Видно, что в случае пренебрежения массой электрона уравнение (1), преобразованное в уравнение (3) является уравнением с разделяющимися переменными и, следовательно, имеет аналитическое решение, которое описывается формулой

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{g}{g'} A \right)^{1/4} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_i} \right)^{1/4} \quad (5)$$

и является решением задачи для уравнения (3) с начальным условием $T'(T_i) = 0$. График этого решения представлен на рис. 1.

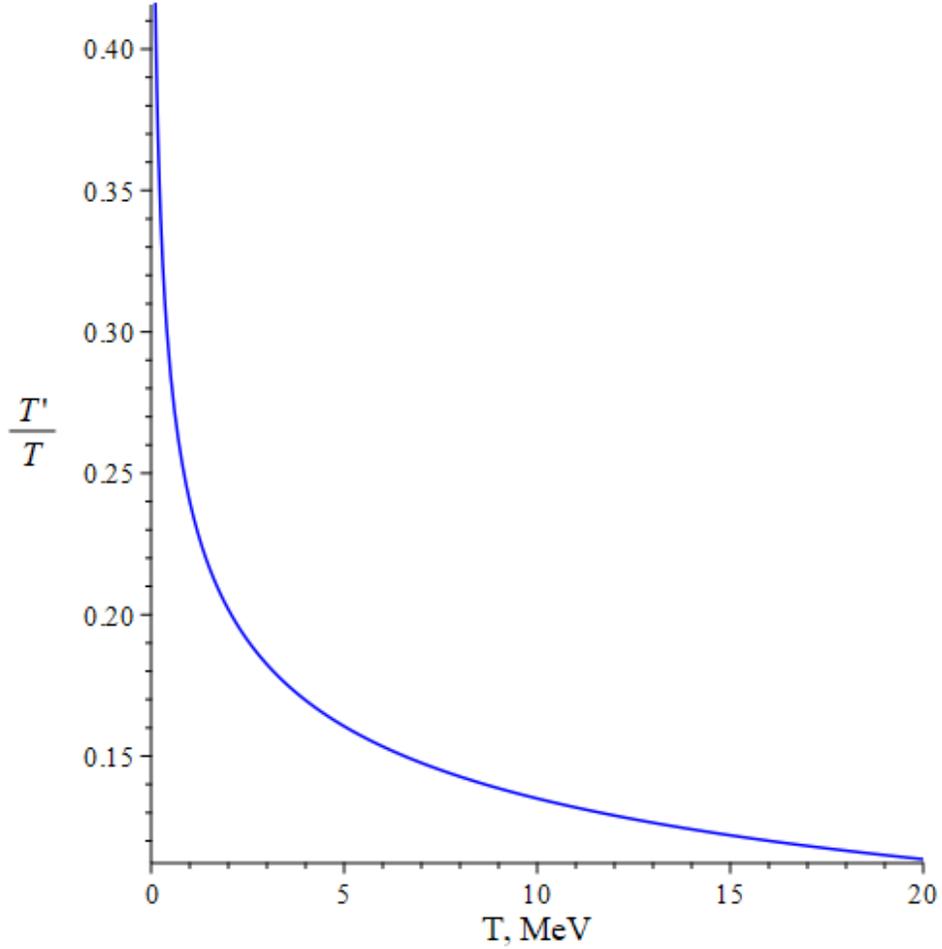


Рис. 1: График зависимости отношения температур в зеркальном и обычном секторах от температуры в пренебрежении массой электрона

2.2 Случай учета массы электрона и усреднения по сечению, скорости Мёллера и передаваемой энергии

С учетом массы электрона выражение для концентрации n_{e^-} электронов и позитронов приобретает вид

$$n_{e^+} \simeq n_{e^-} \simeq \frac{1}{\pi^2} \int_{m_e}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} E}{1 + e^{E/T}} dE, \quad (6)$$

С учетом (6), уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial \rho' / \rho}{\partial T} = \frac{-n_{e^+} n_{e^-} \langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle 0.6 M_{Pl}}{\pi^2 g T^4 / 30 \sqrt{g} T^3}. \quad (7)$$

Полученное соотношение является основным уравнением, описывающим эволюцию процесса заполнения зеркального сектора.

Рассмотрим теперь величину, характеризующую скорость заполнения зеркального сектора $\langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle$, учитывая массу электрона. В этом случае выражение для нее приобретает вид

$$\langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{8m_e^4 T^2 K_2^2(m_e/T)} \int_{4m_e^2}^{\infty} ds \sigma(s - 4m_e^2) \sqrt{s} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE_+ e^{-E_+/T} E_+ \sqrt{\frac{E_+^2}{s} - 1}, \quad (8)$$

где сечение $\sigma = \frac{4\pi}{3}\alpha^2\epsilon^2\frac{1}{s^3}(s + 2m_e^2)^2$, $K_2(m_e/T)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го порядка. График данной величины представлен на рис. 2.

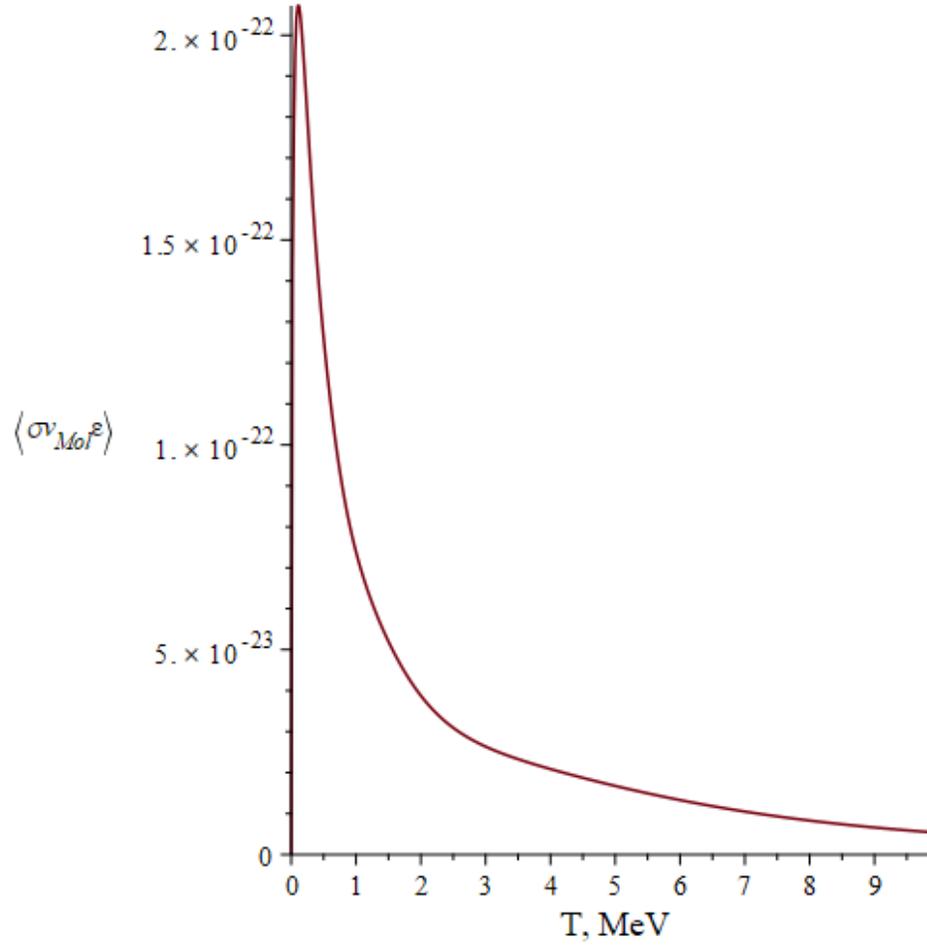


Рис. 2: График зависимости $\langle \sigma v_{Mol} \mathcal{E} \rangle$ от температуры T

С учетом вида данной величины, становится ясным, что уравнение (7) не может быть решено аналитически.

2.2.1 Решение уравнения эволюции зеркального сектора в случае усреднения по сечению, скорости Мёллера и передаваемой энергии

Рассмотрим более подробно вопрос о решении уравнения (7). Как уже было упомянуто, данное уравнение не может быть решено аналитически, поэтому для его решения использовались численные методы, заключающиеся в аппроксимации правой части уравнения легко интегрируемыми функциями. При этом решение данного уравнения в переменных T'/T с учетом упомянутого выше ограничения из [2] ограничено значением 0,3 и должно иметь асимптотику $\propto T^{-1/4}$ при больших значениях температуры, т.е. с определенной точностью сходиться с решением в случае пренебрежения массой электрона.

Все действия по решению уравнения (7) произведены в программном пакете Maple. На рис. 3(а) представлен график зависимости правой части данного уравнения от температуры обычного вещества.

Видно, что данная функция имеет сложную структуру с точки зрения решения дифференциального уравнения, по причине чего возникает вопрос выбора наилучшей аппроксимирующей функции. В качестве такой функции в итоге выбран сплайн третьего порядка. Его график, совмещенный с графиком правой части уравнения на промежутке $0 < T < 20$, представлен на рис. 3(а). На рис. 3(б) представлена относительная ошибка данной аппроксимации.

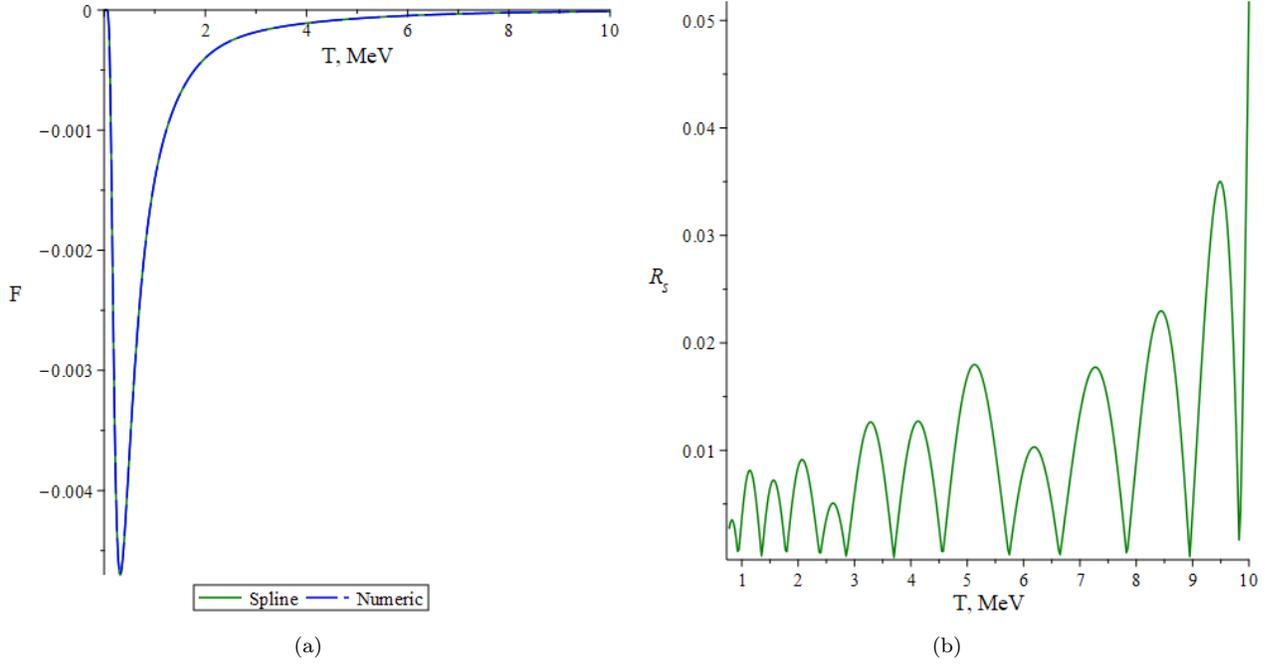


Рис. 3: (а) - график зависимости правой части уравнения (7), сопоставленный со сплайном; (б) - относительная ошибка аппроксимации

График решения уравнения (7), полученного в результате интегрирования правой части в виде сплайна, представлен на рис. 3(а), 3(б). Видно, что даже при использовании сплайн-аппроксимации график не обладает нужной асимптотикой. Это может быть связано с конечностью промежутка аппроксимации.

Рассмотрим, как изменяется решение уравнения (7) в зависимости от способа аппроксимации его правой части. Для этого в работе, помимо аппроксимации сплайном, исследовано поведение решения при принципиальном изменении вида аппроксимирующей функции, а также при изменении ее параметров.

Сначала выберем в качестве аппроксимирующей функции обобщенный многочлен вида

$$F_m(T) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} C_n e^{-\beta T} \sqrt{T}, \quad (9)$$

где β и C_n — параметры, подлежащие определению. Получившийся график аппроксимирующей функции $F_m(T)$, сопоставленный с графиком правой части уравнения (7), представлен на рис. 5(а).

Для данной фитирующей функции получена относительная невязка, график которой представлен на рис. 3(б). Из приведенного графика видно, что уже при относительно небольших значениях температуры ошибка приближения существенно возрастает, что в итоге приводит к расходимости решения, т.е. требуемая асимптотика наблюдаться не будет.

Действительно, решение уравнения (7) с правой частью в форме (9) при $m = 10$, которое, в свою очередь, с учетом описанной интерполяции теперь интегрируется в квадратурах, имеет вид, представленный на рис. 5(с) (для перехода от соотношения плоскостей к соотношению температур использована связь (5)). Также на данном графике показана зависимость соотношения T'/T температур зеркального и обычного секторов соответственно для случая пренебрежения массой электрона.

Как уже было сказано ранее, ожидается, что при больших значениях температуры график решения основного уравнения с учетом массы электрона стремится к графику решения в случае пренебрежения этой массой. Интегрируя уравнение (7), становится окончательно ясным, что при использовании интерполяционной функции (9) при $m = 10$ требуемая асимптотика отсутствует.

Рассмотрим поведение интерполяционной функции (9) при других количествах членов разложения. Соответствующие графики $F_m(T)$ для случаев $m = 10; 5; 90; 50$ сопоставлены на рис. 6(а). Анализируя приведенные графики, можно утверждать, что изменение количества членов разложения не позволяет избавиться от осцилляций, возникающих вследствие накопления ошибки аппроксимации. Так, на рис. 6(б)

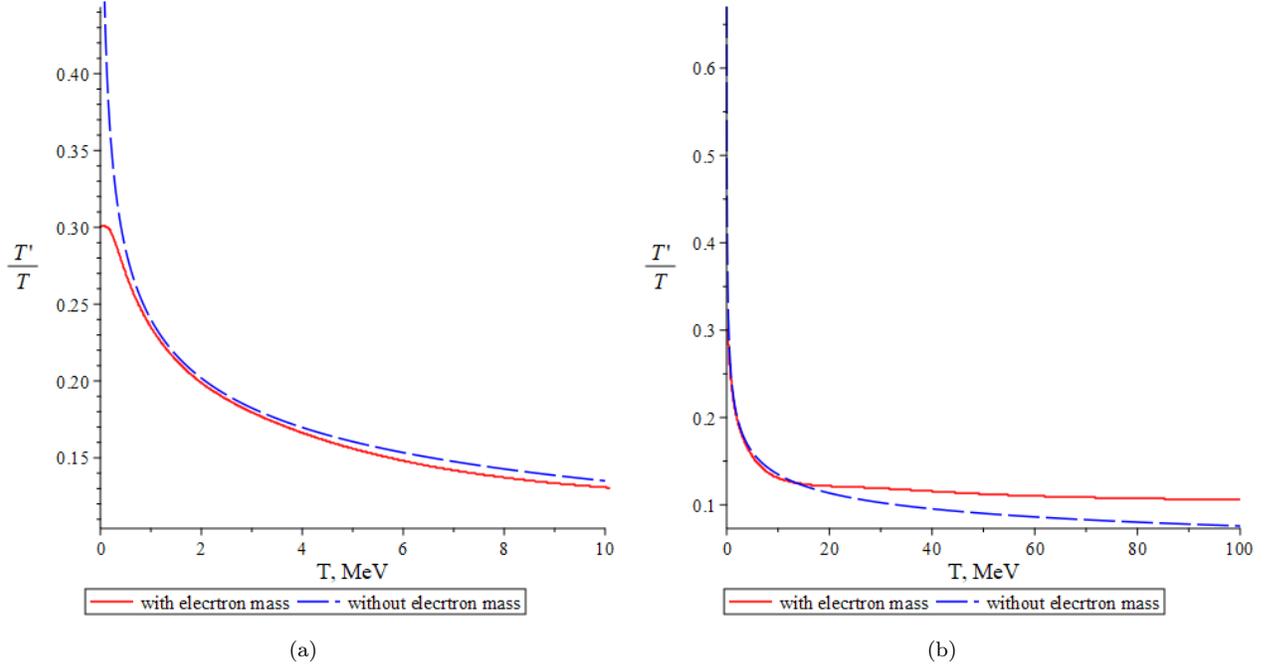


Рис. 4: (а) — график зависимости решения уравнения (12), сопоставленный с графиком решения в случае пренебрежения массой электрона в промежутке $0 < T < 10$; (б) — в промежутке $0 < T < 100$.

изображен график решения уравнения (7) при количестве членов разложения аппроксимирующей функции (9) $m = 90$. Видно, что при малых температурах ($T \lesssim 2$ МэВ) графики решений близки, на что указывает малость ошибки аппроксимации в данном диапазоне температур, однако при больших T ошибка начинает резко возрастать, что свидетельствует о том, что и в этом случае решение не обладает требуемой асимптотикой.

Далее рассмотрим в качестве аппроксимирующей функции обобщенный многочлен вида

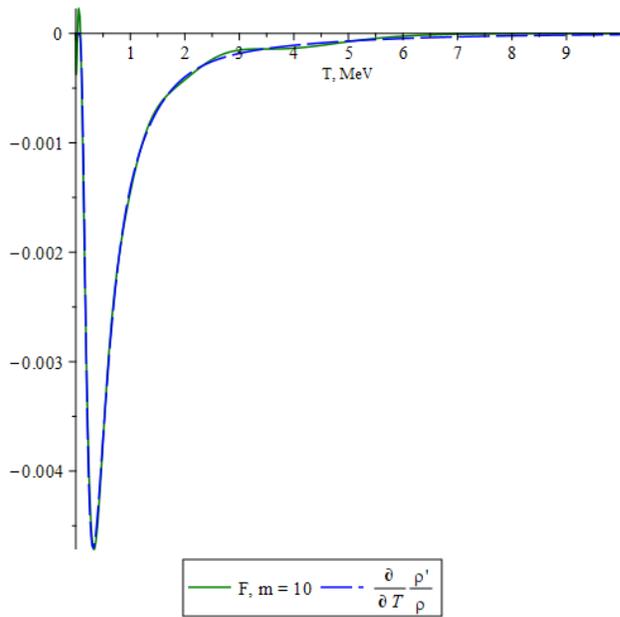
$$F_m(T) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} C_n \frac{e^{-\beta T}}{T^4}. \quad (10)$$

Для выбранного многочлена (10) произведены все те же операции, что и для (7), т. е. получены графики аппроксимирующих функций, их невязок и решений для различных значений количества членов разложения. На рис. 7(а), 7(б), 7(с) приведены графики аппроксимации, наилучшей степени ошибки и соответствующее ей решение. Видно, что и в данном случае решение не обладает нужной асимптотикой, несмотря на хорошее приближение при малых T , поэтому для получения наиболее точного решения уравнения использован метод, описанный ниже.

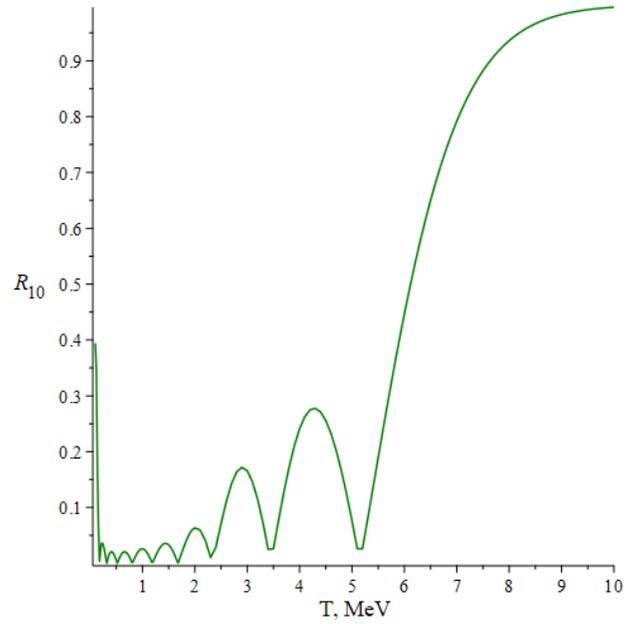
Возьмем в качестве аппроксимирующей функции правой части уравнения эволюции кусочно-непрерывную функцию вида

$$F_m(T) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{100} C_n e^{-20T} T^{-1/4}, & T < 4 \\ \frac{a}{T^2}, & T \geq 4 \end{cases} \quad (11)$$

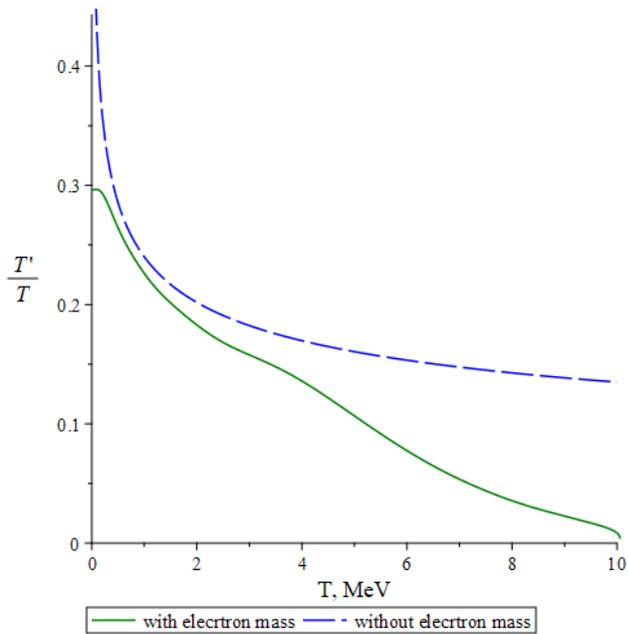
Здесь a - параметр. При интегрировании уравнения с подобной правой частью получено решение, представленное на рис. 8(а) и 8(б). Видно, что в данном случае решение обладает требуемой асимптотикой, т.е. стремится к релятивистскому случаю. Сопоставляя полученный результат с приведенным в [2], можно утверждать, что приведенные графики совпадают с полученными, откуда следует, что грубая оценка параметра кинетического смешивания составляет $\epsilon \simeq 8,5 \cdot 10^{-10}$.



(a)



(b)



(c)

Рис. 5: (a) — график зависимости правой части уравнения (7), сопоставленный с аппроксимирующей функцией $F_{10}(T)$; (b) — невязка для аппроксимирующей функции $F_{10}(T)$

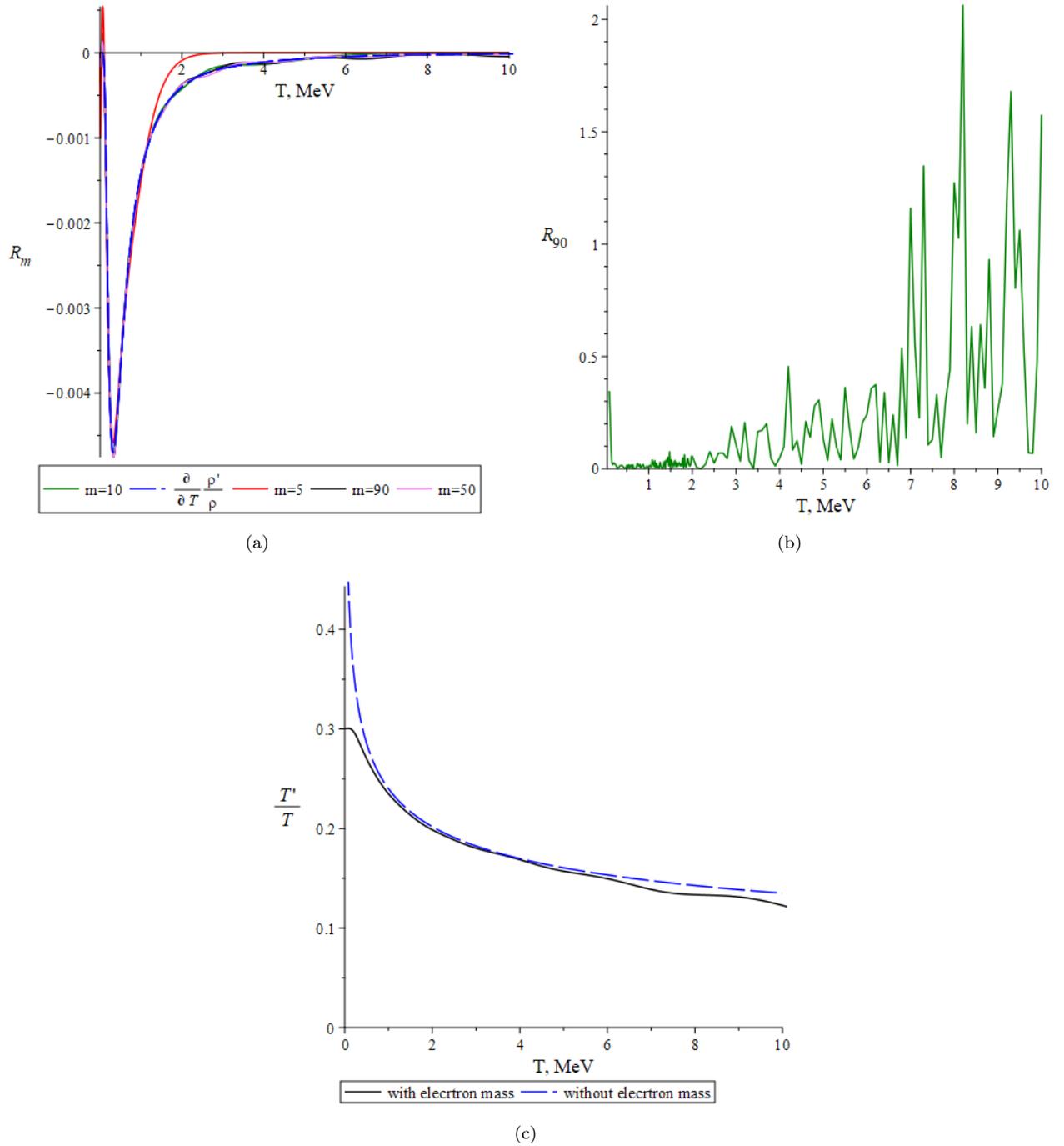
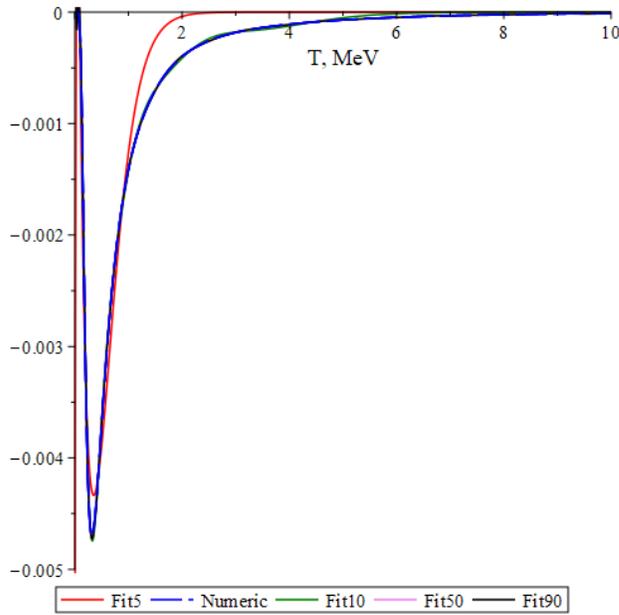
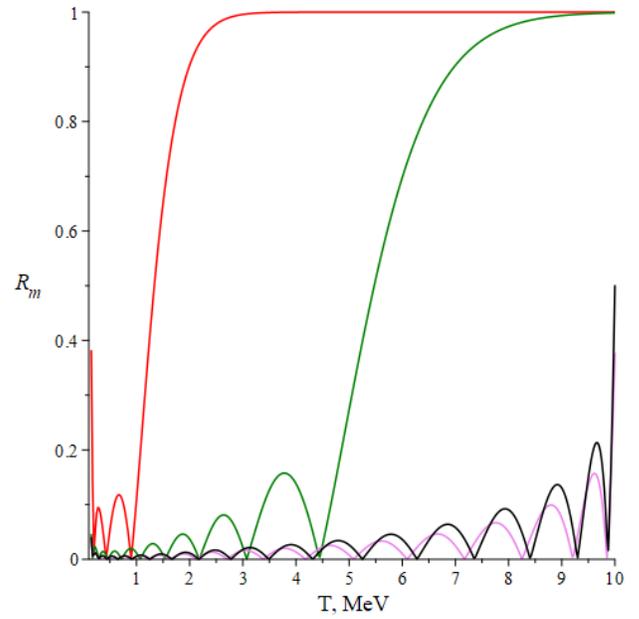


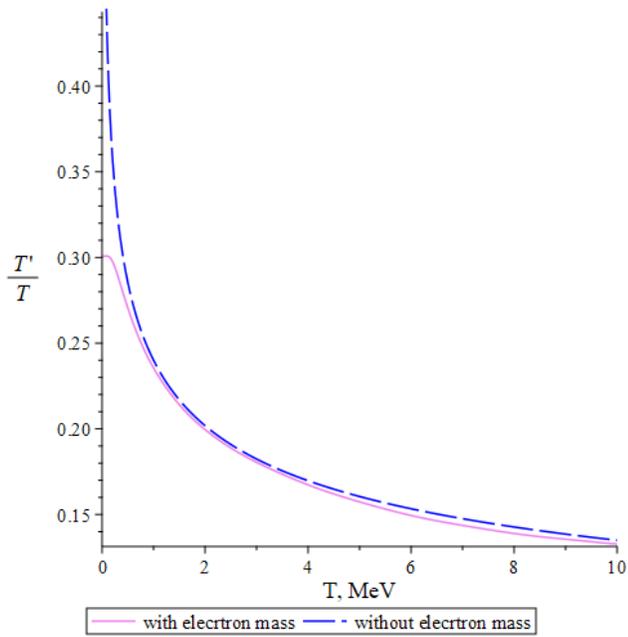
Рис. 6: (a) - график зависимости правой части уравнения (7), сопоставленный с различными аппроксимациями при разных количествах членов разложения; (b) - относительная ошибка для аппроксимирующей функции $F_{90}(T)$; (c) - решение для данной функции



(a)



(b)



(c)

Рис. 7: (a) - график зависимости правой части уравнения (7), сопоставленный с аппроксимирующей функцией $F_m(T)$ для различных значений m ; (b) - соответствующие ошибки; (c) - решение в случае $m = 90$

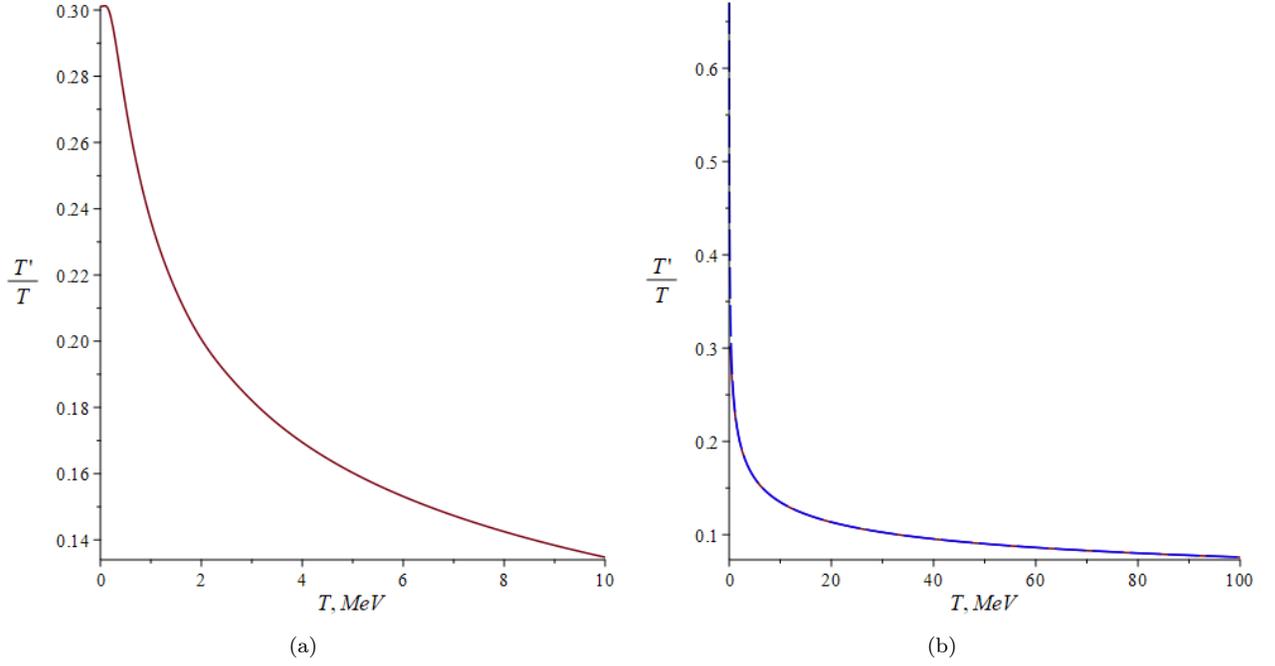


Рис. 8: (a) - решение уравнения с правой частью в виде (11) в интервале $0 < T < 10$; (b) - решение в интервале $0 < T < 100$

2.3 Случай учета массы электрона и усреднения по сечению и скорости Мёллера

Как уже упоминалось во введении к работе, интерес представляет расхождение значений параметров кинетического смешивания в [2], и [3].

Обратимся теперь к результатам, представленным в [3]. Различием является тот факт, что выражение для параметра, отвечающего за скорость заполнения зеркального сектора, имеет иную структуру, чем в [2], в силу того, что усреднение в данном случае ведется по сечению взаимодействия σ и скорости Мёллера v_{Mol} , исключая энергию:

$$\langle \sigma v_{Mol} \rangle = \frac{1}{8m_e^4 T^2 K_2^2(m_e/T)} \int_{4m_e^2}^{\infty} \sigma(s - 4m_e^2) \sqrt{s} K_1\left(\frac{\sqrt{s}}{T}\right) ds, \quad (12)$$

где $K_1\left(\frac{\sqrt{s}}{T}\right)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го порядка.

Как и в предыдущем случае, в рамках работы получен график параметра (12), представленный на рис. 9.

2.3.1 Решение уравнения эволюции зеркального сектора в случае усреднения по сечению и скорости Мёллера

Аналогично случаю учета энергии, передаваемой зеркальному сектору, в усреднении, уравнение решается с помощью метода аппроксимации его правой части. Аппроксимация также проводилась сплайном третьего порядка. График этой аппроксимации, сопоставленный с графиком правой части уравнения эволюции, представлен на рис.10(a). Решение уравнения с правой частью в форме сплайна представлено на рис. 10(b).

Видно, что и в данном случае решение не обладает требуемой асимптотикой, приведенной в [3]. Однако, как и в случае усреднения с учетом передаваемой зеркальному сектору энергии, можно оценить параметр кинетического смешивания, поскольку график имеет нужную нормировку. Следовательно, в

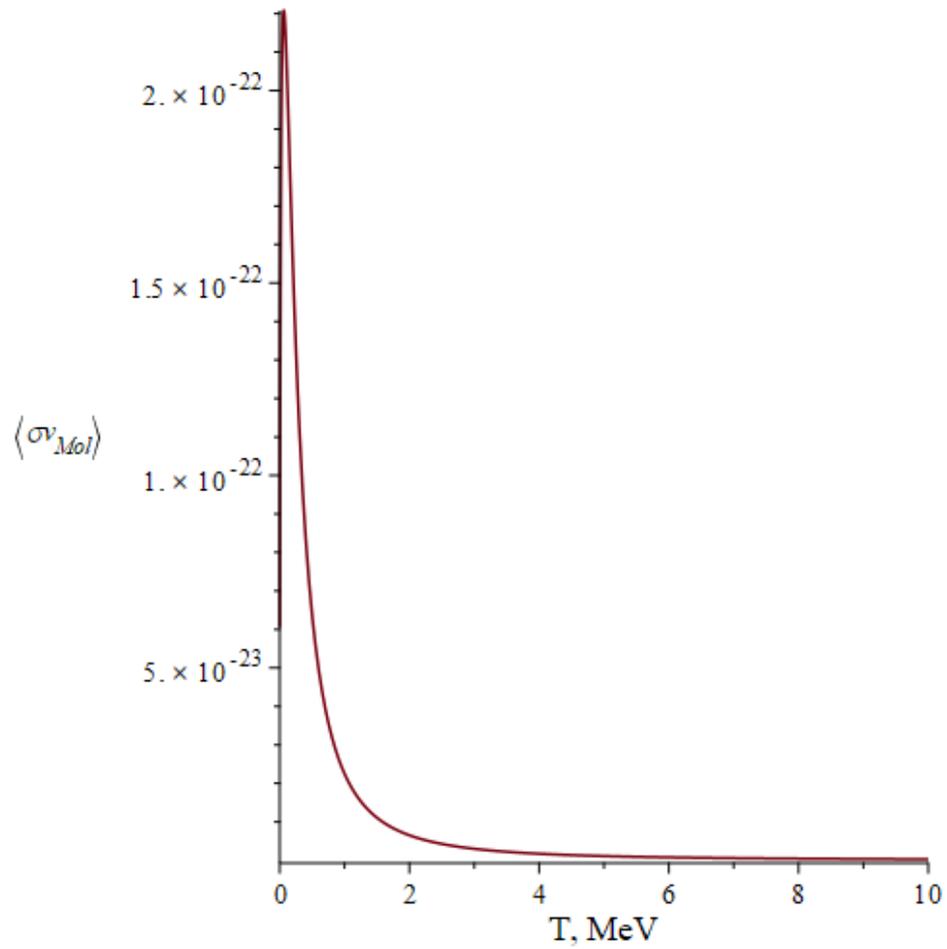


Рис. 9: График зависимости $\langle \sigma v_{Mol} \rangle$ от температуры T

данном случае грубая оценка параметра кинетического смешивания составляет $\epsilon \simeq 10^{-9}$. Как и в предыдущем случае, это лишь грубая оценка, которая нуждается в корректировке посредством обеспечения требуемой асимптотики при больших значениях T .

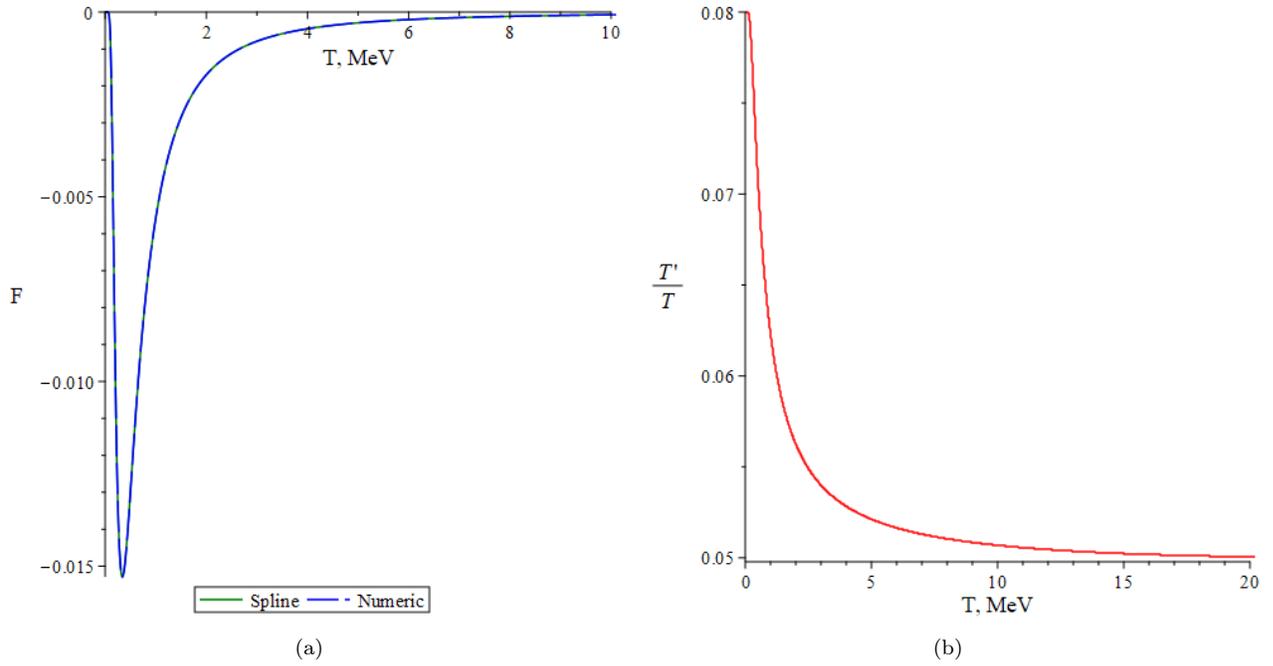


Рис. 10: (а) - график зависимости правой части уравнения (7) в случае усреднения по сечению и скорости Меллера, сопоставленный с аппроксимацией в виде сплайна; (b) - решение

Заключение

Таким образом, в результате работы:

- для уравнения (8) из [2] и [3] получены решения, отвечающие различным видам аппроксимирующих функций;
- изучено влияние изменения параметров аппроксимирующих функций на вид решения данного уравнения.
- получены грубые оценки параметра кинетического смешивания для обеих статей.

Дальнейшее развитие работы состоит в следующем:

- получении решения, наиболее точно удовлетворяющего асимптотическому условию при стремлении к (5);
- получении ограничений на параметр кинетического смешивания для рассмотренной модели зеркальной скрытой массы;
- выяснении вида взаимодействия, отвечающего за кинетическое смешивание с зеркальным сектором.

Список литературы

- [1] L. Gerchow C. Vigo et al. First search for invisible decays of ortho-positronium confined in a vacuum cavity. *Phys. Rev. D* 97, 092008, 3 2018.
- [2] P. Ciarcelluti and R. Foot. Early Universe cosmology in the light of the mirror dark matter interpretation of the DAMA/Libra signal. *Phys.Lett.B*679:278-281, 9 2008.
- [3] Zurab Berezhiani and Angela Lepidi. Cosmological bounds on the "millicharges" of mirror particles. *Phys.Lett.B*681:276-281, 11 2009.