МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

РЕФЕРАТ
ПО ТЕМЕ
"ОПИСАНИЕ БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ В ТЕОРИИ ТВИСТОРОВ"

Студент: Видинеев А. А.

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория твисторов была предложена Роджером Пенроузом в 1967-м году. Она основана на соответствии между сложным пространством твисторов и световыми лучами в обычном пространстве Минковского. Название теории происходит от красивого соответствия Робинсона, которое является реализацией (ненулевого) твистора и описано в разделе 1.4.

Базовым пространством в теории твисторов является не пространство Минковского, а пространство твисторов, элементами которого (грубо говоря) являются световые лучи. Получается автоматически нелокальная теория. Нелокальность - это одно из преимуществ теории твисторов, позволяющее снять известную в КТП проблему квантования гравитации.

Твисторы нужны для того, чтобы с их помощью описывать решения конформно инвариантных уравнений теории поля на пространстве Минковского. [1] "Твисторная программа" [2] Пенроуза заключалась в том, чтобы с помощью построенного им твисторного соответствия сопоставить решениям уравнений указанного типа объекты комплексной аналитической геометрии на пространстве твисторов. При переходе к твисторному описанию конформно инвариантные уравнения "исчезают а остается только комплексная геометрия.

Теория твисторов оказала серьёзное влияние на дифференциальную и интегральную геометрии, теорию нелинейных дифференциальных уравнений и теорию представлений, а в физике - на общую теорию относительности и квантовую теорию поля.

1. ГЕОМЕТРИЯ ТВИСТОРОВ

1.1. ТВИСТОРНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Пространство Минковского M - это четырёхмерное вещественное пространство $\mathbb{R}^4$. Его точки называются событиями. На пространстве M имеется квадратичная форма с сигнатурой $(+---)$: $\beta(x,x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Ненулевой вектор x называется изотропным, если $\beta(x,x) = 0$. Аффинная прямая в M называется световой, если она параллельна прямой, порождённой каким-нибудь световым вектором. Световым конусом с центром в точке x^* называется объединение всех световых прямых, проходящих через точку x^*. Можно дать эквивалентное определение:

$$C_{x^*} = \{x \in M : \beta(x - x^*, x - x^*) = 0\}. \qquad (1.1)$$

Проективное пространство нулевых твисторов $\mathbb{PN}$ - это множество, элементами которого являются световые лучи пространства M. Будем называть пространство $\mathbb{PN}$ ещё пространством световых лучей. О геометрической структуре этого пространства будет сказано ниже. Пока отметим, что оно пятимерно. Действительно, направление световой прямой параметризуется точками двумерной сферы $\mathbb{S}^2$. Когда направление задано, положение прямой задаётся точкой пересечения этой прямой с трёхмерной гиперплоскостью, перпендикулярной выбранному направлению. Таким образом, имеется $2 + 3 = 5$ степеней свободы светового луча [3].

Итак, пусть $\mathbb{M}$ - четырёхмерное пространство Минковского, а $R = (t, x, y, z)$ - произвольная его точка. Пространством твисторов $\mathbb{T}$ для $\mathbb{M}$ называется четырёхмерное векторное пространство над полем комплексных чисел. Точки этого пространства называются твисторами. Таким образом, твистор - это четвёрка комплексных чисел $Z^\alpha = (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3)$. Твистор Z^α называется инцидентным событию R, если выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Пространству твисторов соответствует двойственное (или дуальное) пространство $\mathbb{T}^*$. Элементы дуального пространства $\overline{Z}_\alpha$ выражаются через элементы пространства $\mathbb{T}$ по формуле

$$(\overline{Z}_0, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3) = (\overline{Z^2}, \overline{Z^3}, \overline{Z^0}, \overline{Z^1}). \tag{1.3}$$

Равенство (1.3), определяет эрмитово произведение на пространстве $\mathbb{T}$. Нормой твистора Z называется величина

$$\begin{aligned} \overline{Z}Z = \overline{Z}_0 Z^0 + \overline{Z}_1 Z^1 + \overline{Z}_2 Z^2 + \overline{Z}_3 Z^3 = \\ = \overline{Z^2} Z^0 + \overline{Z^3} Z^1 + \overline{Z^0} Z^2 + \overline{Z^1} Z^3 = \\ = \frac{1}{2}(|Z^0 + Z^2|^2 + |Z^1 + Z^3|^2 - |Z^0 - Z^2|^2 - |Z^1 - Z^3|^2). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Твистор Z называется нулевым, если $\overline{Z}Z = 0$.

Теорема. Твистор Z инцидентен какому-нибудь событию в $\mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда он нулевой.

Импликация $\rightarrow$ доказвается простым вычислением.

Проективным пространством твисторов называется проективизация пространства твисторов $\mathbb{PT}$. Проективное пространство - это множество прямых, проходящих через 0, в $\mathbb{T}$. На пространстве $\mathbb{PT}$ вводятся однородные координаты (координаты определённые с точностью до умножения на ненулевую константу). То есть произвольная точка в проективном пространстве имеет вид:

$$[Z^0 : Z^1 : Z^2 : Z^3]. \tag{1.5}$$

Через $\mathbb{PN}$ обозначается пространство проективных нулевых твисторов. Это пространство имеет 5 вещественных измерений. С дугой стороны, в пространстве $\mathbb{T}$ нулевые твисторы образуют 7-мерное вещественное подпространство. Оно разделяет исходное пространство на две части. Твисторы с $\overline{Z}Z > 0$ называются положительными и образуют пространство $\mathbb{T}^+$.

Отрицательные твисторы $\overline{Z}Z < 0$ образуют пространство $\mathbb{T}^-$. Аналогично, $\mathbb{PN}$ разделяет $\mathbb{PT}$ на две части: $\mathbb{TP}^+$ и $\mathbb{TP}^-$.

Как связаны пространство Минковского M и $\mathbb{PN}$? Если две точки P и Q пространства Минковского инцидентны одному и тому же твистору Z (нулевому), то они разделяются нулевым интервалом, то есть разделяются нулевым интервалом. К тому же твисторам Z и λZ при ненулевых λ отвечает один световой луч. Таким образом, имеется отображение, переводящее пространство $\mathbb{PN}$ в пространство световых лучей пространства Минковского. Заметим, что при $Z^2 = Z^3 = 0$ матрица (1.2) должна иметь бесконечные элементы. Т. е. такому нулевому твистору должен отвечать световой луч на бесконечности. Такой луч лежит на бесконечно-удалённом световом конусе $\mathbb{J}$ компактифицированного пространства Минковского $M^{\#}$.

Наоборот, пусть P - произвольная точка M. Из формулы (1.2) следует, что на компоненты Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 наложено два условия. Каждое соотношение задаёт трёхмерное подпространство в $\mathbb{T}$. Следовательно, оно задаёт двумерное подпространство (проективную плоскость) в проективизации $\mathbb{PT}$. Две эти плоскости пересекаются по проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, которая гомеоморфна сфере $\mathbb{S}^2$. Эта сфера (или проективная прямая) лежит в $\mathbb{PN}$. Пусть j - вершина конуса $\mathbb{J}$. Ей соответствует проективная прямая (сфера) $\mathbb{I}$ в $\mathbb{PN}$. Любой другой точке конуса $\mathbb{J}$ отвечает сфера, пересекающаяся с $\mathbb{I}$.

Все элементы твисторного соответствия показаны на следующем рисунке.

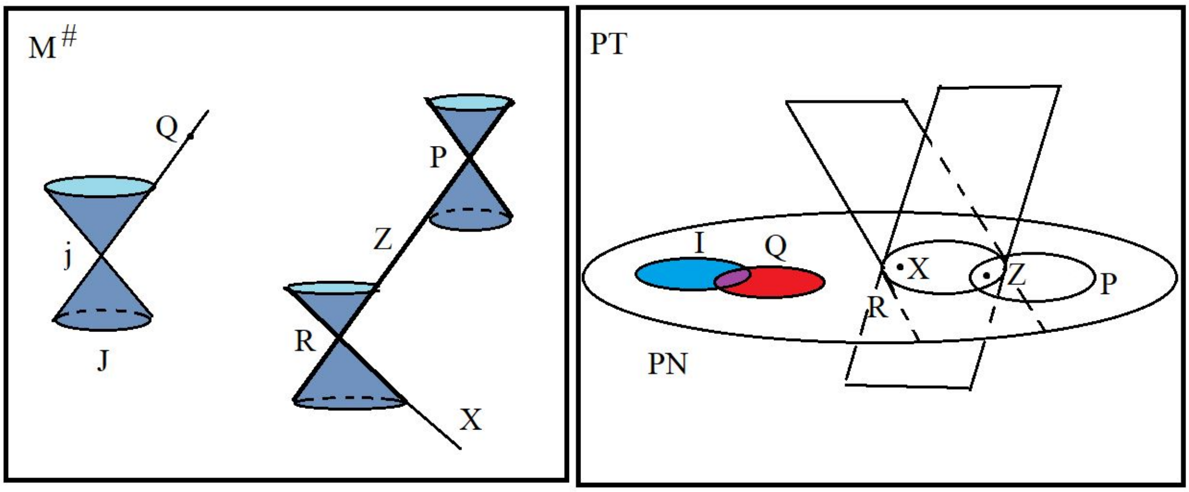

Рисунок 1.1 — Схема твисторного соответствия

1.2. КОМПАКТИФИЦИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

Компактифицированное пространство Минковского $\mathbb{M}^{\#}$ получается из обычного пространства Минковского $\mathbb{M}$ добавлением бесконечно удалённого светового конуса $\mathbb{J}$. Возникающее при этом пространство обладает более высокой симметрией, нежели само пространство Минковского. Однако, данное определение не позволяет выявить эту симметрию.

Дадим более "симметричное определение". Рассмотрим шестимерное пространство $\mathbb{E}^{2,4}$ с метрикой

$$ds^2 = dw^2 + dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - dv^2. \tag{1.6}$$

В этом пространстве рассмотрим пятимерный конус K, заданный уравнением

$$w^2 + t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - v^2 = 0. \tag{1.7}$$

Теперь рассмотрим сечение этого конуса гиперплоскостью $w - v = 1$. Пересечение имеет вид 4-мерного многообразия. Видно, что метрика этого пересечения совпадает с метрикой пространства Минковского

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.8}$$

Компактифицированным пространством Минковского $\mathbb{M}^{\#}$ называется проективизация конуса K. То есть $\mathbb{M}^{\#}$ - это множество образующих конуса K.

Группа $O(2,4)$ изометрий пространства $\mathbb{E}^{2,4}$ действует на множестве образующих конуса K. У этого действия имеется ядро. Преобразовае, которое меняет направление образующей конуса K тождественно действует на множестве образующих. Тем самым, группа изометрий пространства $\mathbb{M}^{\#}$ изоморфна группе $O(2,4)/\mathbb{Z}_2$. Эта группа называется конформной группой пространства $\mathbb{M}^{\#}$.

Конформная группа содержит подгруппу преобразований, сохраняющих гиперплоскость $w - v = 1$. Это 10-мерная группа Пуанкаре.

Рисунок 1.2 — Пересечение конуса $w^2 + t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - v^2 = 0$ и гиперплоскости $w - v = 1$ является пространством Минковского

1.3. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Комплексное пространство Минковского $\mathbb{C}M$ - это комплексификация пространства Минковского M, совпадающая с 4-мерным комплексным векторным пространством, состоящим из векторов $z = \left(z^0, z^1, z^2, z^3\right) \in \mathbb{C}^4$. Также, как в вещественном случае, вектор $z \in \mathbb{C}M$ называется комплексным световым вектором, если

$$|z|^2 = \left(z^0\right)^2 - \left(z^1\right)^2 - \left(z^2\right)^2 - \left(z^3\right)^2 = 0. \tag{1.9}$$

Комплексный световой конус с вершиной в точке $z_0 \in \mathbb{C}M$ задается уравнением: $(z - z_0)^2 = 0$. Аналогами конусов будущего и прошлого в комплексном случае являются труба будущего

$$\mathbb{C}M_+ = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C}M : |y|^2 > 0, y^0 > 0\right\} \tag{1.10}$$

и труба прошлого

$$\mathbb{C}M_- = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C}M : |y|^2 > 0, y^0 < 0\right\} \tag{1.11}$$

Евклидово пространство E является 4-мерным вещественным векторным подпространством в $\mathbb{C}M$, задаваемым уравнениями

$$z^0 = x^0, z^1 = ix^1, z^2 = ix^2, z^3 = ix^3, \tag{1.12}$$

где x^0, x^1, x^2, x^3 - произвольные вещественные числа.

1.4. НЕНУЛЕВЫЕ ТВИСТОРЫ

Заметим, что первые две компоненты Z^0, Z^1 твистора Z представляют собой две компоненты 2-спинора ω. $\omega^0 = Z^0, \omega^1 = Z^1$. Последние две коммпоненты Z^2, Z^3 являются компонентами штрихованного (дуального) спинора π. $\pi_{0'} = Z^2, \pi_{1'} = Z^3$ [4]. Таким образом,

$$Z = (\omega, \pi). \tag{1.13}$$

Для сопряжённого спинора:

$$\overline{Z} = (\overline{\omega}, \overline{\pi}). \tag{1.14}$$

Соотношение инцидентности между твистором и событием в пространстве Минковского теперь записывается в виде

$$\omega = ir\pi, \tag{1.15}$$

где r - матрица

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Внешнее произведение $\overline{\pi}\pi$ интерпретируется как 4-импульс некоторой частицы. Симметризованные произвежения $\omega\overline{\pi}$ и $\overline{\omega}\pi$ описывают части момента импульса частицы.

Из импульса и момента импульса можно построить спиральность. Она буде равна половине нормы твистора:

$$s = \frac{1}{2}\overline{Z}_\alpha Z^\alpha. \tag{1.17}$$

Из последней формулы можно заключить, что ненулевые твисторы соответствуют частицам с ненулевой спиральностью. То есть, на классическом языке, ненулевые твисторы соответствуют вращающимся безмассовым частицам (отсюда и название).

Соответствие Пенроуза - это соответствие между пространством твисторов (в том числе ненулевых) и пространством $\mathbb{C}M^{\#}$. Твистору Z ставится в соответствие множество инцидентных с ним событий из $\mathbb{C}M^{\#}$. Теперь координаты t, x, y, z являются комплексными числами. Множество точек, инцидентных твистору Z образует плоскость, которая называется α-плоскостью. Дуальный твистор $\overline{Z}$ определяет β-плоскость в $\mathbb{C}M^{\#}$.

Вещественная картина такова. Сопряжённому твистору $\overline{Z}$ в проективном твисторном пространстве $\mathbb{PT}$ отвечает плоскость (точки и плоскости проективно двойственны). Эта плоскость пересекается с $\mathbb{PN}$ по некоторому 3-мерному множеству. Этому множеству соответствует 3-мерное семейство световых лучей в обычном пространстве Минковского.

Рисунок 1.3 — Ненулевому твистору Z соответствует 3-мерная система световых лучей в пространстве Минковского

3-мерное семейство световых лучей, соответствующих ненулевому твистору Z называется конгруэнцией Робинсона [5]. В фиксированный момент времени её можно изобразить (рис 1.4). Каждой точке на этой картине соответствует световой луч. Стрелки показывают направления световых лучей. проходящей через эту точку. С течением времени вся эта конфигурация перемещается как целое со скоростью света в направлении одной прямой линии на этой картине, и это перемещение представляет движение вращающейся безмассовой частицы, описываемой твистором [6].

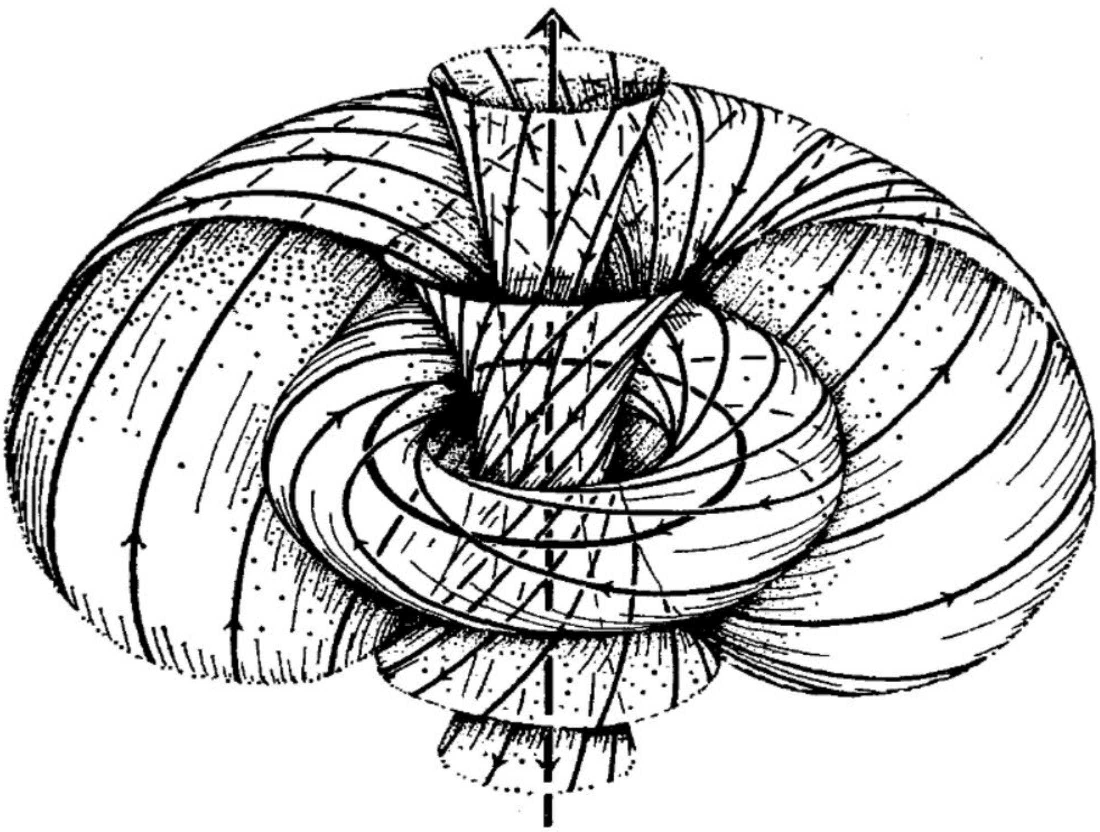

Рисунок 1.4 — Конгруэнция Робинсона в фиксированный момент времени

2. КВАНТОВАНИЕ И БЕЗМАССОВЫЕ ЧАСТИЦЫ

2.1. КВАНТОВАНИЕ

Квантовая твисторная теория строится с использованием нелокальных переменных Z^α. Вместо обычных координат пространства Минковского используются твисторы.

Квантование происходит по стандартной канонической схеме. Твисторы Z^α и $\overline{Z}_\alpha$ превращаются в операторы со следующими коммутационными соотношениями:

$$\left[Z^\alpha, \overline{Z}_\beta\right] = \hbar\delta^\alpha_\beta; \tag{2.1}$$

$$\left[Z^\alpha, Z^\beta\right] = 0; \left[\overline{Z}_\alpha, \overline{Z}_\beta\right] = 0. \tag{2.2}$$

Вводится твисторная функция $f(Z)$. Это твисторная функция в Z-представлении. Она не должна зависеть от $\overline{Z}$. То есть $\frac{\partial f(Z)}{\partial \overline{Z}} = 0$. Твисторная функция $f(Z)$ должна быть голоморфной [7].

В Z-представлении сопряжённому твистору $\overline{Z}$ отвечает обератор $-\hbar\frac{\partial}{\partial Z}$. Оператор спиральности записывается так:

$$s = \frac{1}{4}\left(Z\overline{Z} + \overline{Z}Z\right) = -\frac{1}{2}\hbar\left(2 + Z\frac{\partial}{\partial Z}\right). \tag{2.3}$$

Как известно, собственные функции оператора $Z\frac{\partial}{\partial Z}$ однородны, при этом собственными числами являются степени однородности. Следовательно, твисторная функция $f(Z)$ безмассовой частицы с определённым значением спиральности S должна быть однородной степени $-2S - 2$. Это следует из уравнения (2.3).

Так, в частности, твисторная функция фотона ($S = \pm 1$) будет суммой двух частей, одна из которых, однородная степени 0, описывает левополяризованную компоненту ($S = -1$), а другая, степени -4, — правополяризованную компоненту ($S = 1$). Нейтрино, рассматриваемое как безмассовая частица, имеет волновую функцию со степенью однородности -1 (поскольку спиральность равна $-\frac{1}{2}$). Волновая функция безмассовой скалярной частицы имеет степень однородности -2. У гравитона $S = \pm 2$. Его левополяризованной части ($S = -2$) соответствует твисторная волновая функция, однородная степени 2, а правополяризованной части ($S = 2$) — твисторная волновая функция, однородная степени -6.

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ: ПУЧКИ И ИХ КОГОМОЛОГИИ

Пусть X - комплексное многообразие (например, сфера римана или пространство твисторов) и (U_i)- покрытие X открытыми множествами. Будем говорить, что на X задан пучок голоморфных функций P, если каждому открытому множеству из (U_i) сопоставлен класс голоморфных на этом множестве функций. В более общем случае, открытым множестам можно сопоставить любую абелеву группу [8].

Если на X задан пучок P, то на X можно построить когомологии Чеха. Для этого определим p-коцепи. 0-коцепь - это набор функций f_i, определённых на каждом множестве U_i; 1-коцепь - это набор функций f_{ij}, определённых на двойных пеересечениях $U_i \cap U_j$, так, чтобы выполнялось соотношение $f_{ij} = -f_{ji}$; 2-коцепь - это набор функций f_{ijk}, определённых на тройных пересечениях $U_i \cap U_j \cap U_k$, причём f_{ijk} должны быть кососимметричны по индексам; и т. д. Группа p-коцепей - это множество всех p-коцепей.

Кограничный оператор (или оператор кодифференцирования) δ сопоставляет p-коцепи $\alpha = \{f_{i\ldots k}\}$ $(p+1)$-коцепь $\delta\alpha = \{g_{i\ldots kl}\}$. Если $p = 0$, то $g_{ij} = f_j - f_i$; если $p = 1$, то $g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$; если $p = 2$, то $g_{ijkl} = f_{jkl} - f_{ikl} + f_{ijl} - f_{ijk}$; и т. д.

p-коцепь α называется коциклом, если $\delta\alpha = 0$, и кограницей, если она имеет вид $\alpha = \delta\beta$. Легко проверить, что все кограницы являются коциклами, т. е. $\delta^2 = 0$ (это называется тождеством пуанкаре).

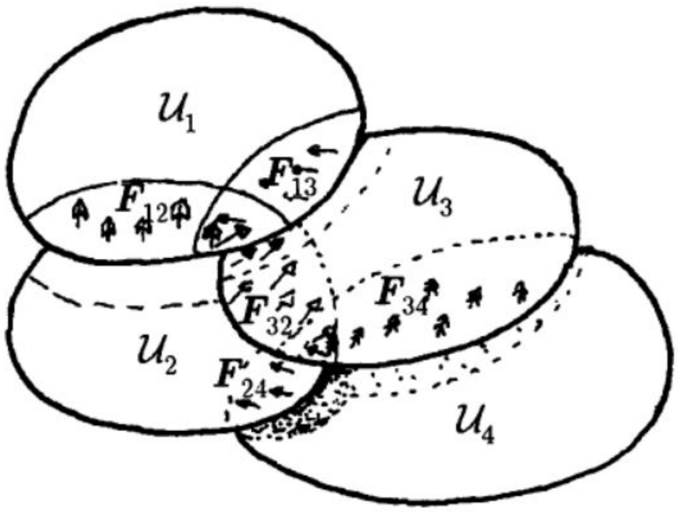

Рисунок 2.1 — 1-коцепь - это набор голоморфных функций на двойных пересечениях

Обозначим через $H^p_U(X, P)$ факторгруппу группы p-коциклов по подгруппе p-кограниц. Переходя к пределу по всё более мелким покрытиям U многообразия X, получим в пределе пространство $H^p(X, P)$, называемое p-й группой когомологий X с коэффициентами в пучке P.

2.3. БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ

Частица с отрицательной спиральностью $S = -\frac{1}{2}n$ описывается полевой функцией вида $\phi_{AB\ldots L}$. Частица с положительной спиральностью $S = \frac{1}{2}n$ описывается полевой функцией со штрихованными индексами. $\phi_{A'B'\ldots L'}$. У каждой функции имеется n индексов.

Каждая из них полностью симметрична по всем n индексам и имеет положительную частоту, удовлетворяя соответствующим уравнениям

$$\nabla^{AA'}\phi_{AB\ldots L} = 0, \tag{2.4}$$

$$\nabla^{AA'}\phi_{A'B'\ldots L'} = 0. \tag{2.5}$$

При $S = 0$ мы имеем уравнение Даламбера

$$\Box\phi = 0. \tag{2.6}$$

При $S = +\frac{1}{2}$ получаем уравнение Вейля для нейтрино; при $S = \pm 1$ имеем 2-спинорный вариант уравнений Максвелла для свободного поля; при $S = \pm 2$;— калибровочно инвариантную спинорную форму свободного линеаризованного поля Эйнштейна.

Решения приведённых уравнений можно получить из твисторной функции $f(z)$ по следующим формулам [9]:

$$\phi_{AB...L} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{\partial}{\partial\omega^A} \frac{\partial}{\partial\omega^B} ... \frac{\partial}{\partial\omega^L} f(Z) d\pi_{0'} \wedge d\pi_{1'}, \tag{2.7}$$

$$\phi_{A'B'...L'} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \pi_{A'}\pi_{B'}...\pi_{L'} f(Z) d\pi_{0'} \wedge d\pi_{1'} \tag{2.8}$$

В случае положительной спиральности функция $f(Z)$ сначала n раз умножается на π, что дает n штрихованных индексов; при отрицательной спиральности сначала n раз применяется операция $\frac{\partial}{\partial\omega}$, что дает n нештрихованных спинорных индексов. Затем производится умножение на 2-форму $d\pi_{0'} \wedge d\pi_{1'}$ и интегрирование по подходящему 2-мерному контуру, при этом вначале используется соотношение инцидентности $\omega = ir\pi$, чтобы исключить величину ω выразив ее через π и r. Интегрирование устраняет π, и в результате получается индексированная величина $\phi ...$ в любой выбранной пространственно-временной точке R (так что $\phi ...$ зависит только от r).

Интегрирование происходит по двумерному контуру в пространстве твисторов. Этот контур лежит в множестве твисторов, инцидентных данному событию. На проективной картинке двумерный контур превращается в одномерный. Он должен лежать в множестве твисторов, инцидентных событию. То есть он должен лежать на проективной комплексной прямой (или на сфере Римана) в пространстве проективных твисторов. Заметим, что эта прямая лежит в пространстве $\mathbb{PN}$.

Условие положительной частотности полевой функции (функция называется положительно частонтной, если в её разложении в интеграл Фурье присутствую только экспоненты с отрицательными показателями $exp(-ikx)$) обеспечивается требованием, что контурные интегралы (2.7) и (2.8) сохраняют смысл, когда проективная прямая (сфера Римана) попадает в область положительных твисторов $\mathbb{PT}^+$.

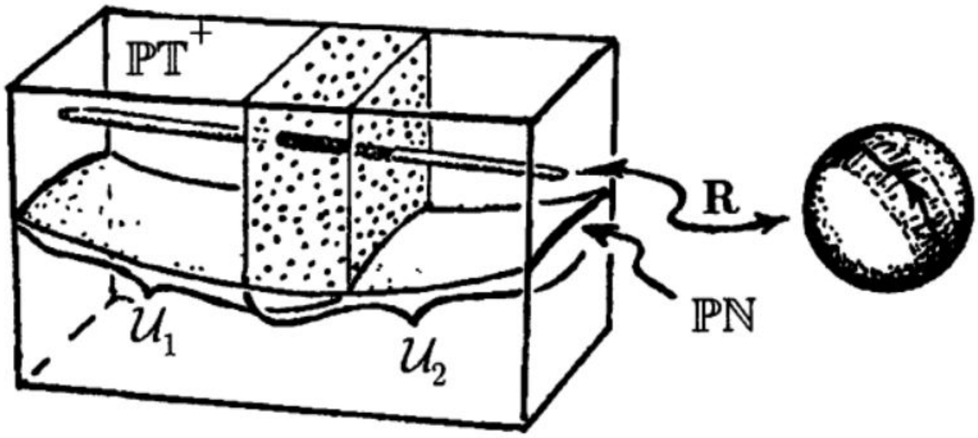

Рисунок 2.2 — Интегрирование производится по двумерному (в проективном случае - одномерному) контуру, который целиком лежит в множестве твисторов, инцидентных данному событию.

2.4. ТВИСТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

Теперь дадим точное определение твисторной функции $f(Z)$.

Так как она должна быть голоморфной, то её область определения не может совпадать со всем пространством твисторов $\mathbb{T}$ или даже со всем $\mathbb{T}^+$. Нужно задать $f(Z)$ на более мелком множестве.

Покроем пространство $\mathbb{PT}^+$ двумя открытыми множествами U_1 и U_2. Они пересекаются по области типа кольца $U_1 \cap U_2$ (рис.2.2). На этой области задаётся функция $f = f_{12} = -f_{21}$. Эта функция голоморфна в $U_1 \cap U_2$, но при продолжении всё $\mathbb{PT}^+$ имеет особенности, лежащие в $U_1 \backslash U_2$ или в $U_2 \backslash U_1$.В более общих случаях может понадобиться больше открытых множеств и соответственно больше функций. Но в любом случае правильное описание твисторной функции безмассовой частицы спиральности S состоит в том, что она является элементом группы когомологий над пучком голоморфных функций со степенью однородности $-2S-2$:

$$H^1(\overline{\mathbb{PT}^+}, O(-2S-2)). \tag{2.9}$$

Использование в этом опрделении именно пространства $\mathbb{PT}^+$ обеспечивает выполнение условия положительной частотности полевой функции (можно было бы рассматривать пространство $\mathbb{PT}^-$). Продолжимость на замыкание $\overline{\mathbb{PT}^+} = \mathbb{PT}^- \cup \mathbb{PN}$ обеспечивает нормируемость полевой функции. Для $\mathbb{PT}^+$ вполне достаточно рассматривать покрытия двумя множествами, но саму конструкцию можно обобщить и на случай, когда $\mathbb{PT}^+$ заменяется каким-либо другим подмножеством X в $\mathbb{PT}$. Тогда может понадобиться более сложное покрытие.

Итак, твисторная функция определяется на пересечении двух областей с точностью до добавления функции вида $h_1 - h_2$, где h_1 и h_2 определены на множествах U_1 и U_2. Можно доказать, что контурные интегралы (2.7) и (2.8) не зависят от выбора функции $f(Z)$ из класса эквивалентности.

2.5. РАСЩЕПЛЕНИЕ

Рассмотрим сферу Римана $\mathbb{S}^2$ с экватором $\mathbb{R}$ и полюсами i и $-i$. Комплексная функция (голоморфная), определённая на вещественной оси $\mathbb{R}$ (на экваторе), расщепляется на положительно-частотную часть, голоморфно продолжаемую на северное полушарие, и на отрицательно-частотную часть, голоморфно продолжаемую на южное полушарие.

Примерно то же самое происходит в твисторном случае. Твисторная функция определённая на $\mathbb{PN}$ (элемент 1-й когомологии, представляющий безмассовое поле), расщепляется на положительно-частотную часть, голоморфно продолжаемую на $\mathbb{PT}^+$, и на отрицательно-частотную часть, голоморфно продолжаемую в $\mathbb{PT}^-$.

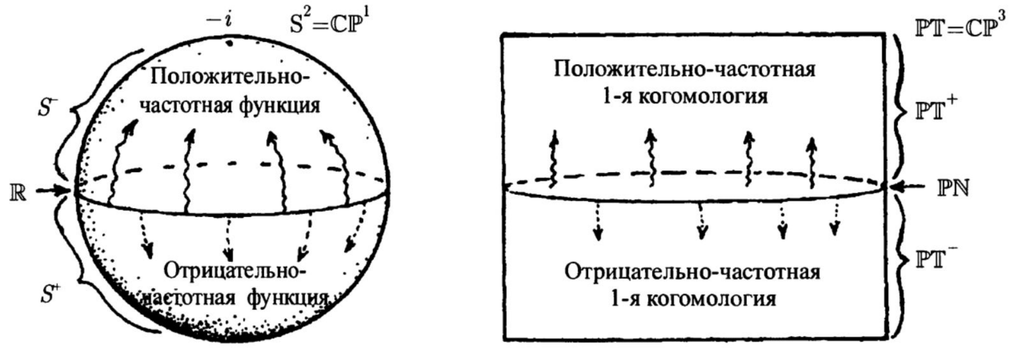

Рисунок 2.3 — Твисторная функция, определённая на $\mathbb{PN}$ расщепляется на положительно-частоную и на отрицательно-частоную части.

Итак, безмассовые поля в пространстве Минковского $M^{\#}$ представляются элементоми первой когомологии на $\mathbb{PN}$. Каждый из них можно представить в виде суммы элемента, продолжаемого в $\mathbb{PT}^+$, и элемента, продолжаемого в $\mathbb{PT}^-$. Первое слагаемое описывает положительно-частотное безмассовое поле, второе — отрицательно-частотное безмассовое поле. На языке пространственно-временных терминов положительно-частотная часть поля при продолжении образует трубу будущего в пространстве $\mathbb{CM}$. Отрицательно-частотная часть поля при продолжении образует трубу прошлого в пространстве $\mathbb{CM}$.

2.6. НЕЛИНЕЙНЫЙ ГРАВИТОН

Сначала рассмотрим случай, когда твисторная функция $f(Z)$ однородна степени о (соответствует фотону с $S = -1$). Твисторное пространство $\mathbb{T}^+$ можно рассматривать как расслоение над пространством $\mathbb{PT}^+$. Функцию f можно использовать для деформации этого расслоения, с тем чтобы получить искривлённую твисторную структуру τ^+. Пусть $\mathbb{T}^+$ покрыто двумя множествами U_1 и U_2 и функция f определена на пересечении $U_1 \cap U_2$. Таким образом, $\mathbb{T}^+$ является объединением множеств $\mathbb{P}U_1$ и $\mathbb{P}U_2$, поднятия которых в пространстве расслоения совпадают с U_1 и U_2.

Чтобы получить искривлённое пространство твисторов τ^+ склеим множества U_1 и U_2 по-другому, а именно для $\hat{Z}^\alpha \in U_1$ и $Z^\alpha \in U_2$ определяется функция перехода в τ^+ на пересечении $U_1 \cap U_2$:

$$\hat{Z}^\alpha = e^{f(Z)} Z. \tag{2.10}$$

Здесь необходимо, чтобы f имело однородность степени нуль, так как преобразованию $Z \to \lambda Z$ должно соответствовать преобразование $\hat{Z} \to \lambda \hat{Z}$.

Так как геометрия пространства-времени полностью определяется структурой проективного твисторного пространства, то пространственно-временная геометрия, соответствующая τ^+, остается такой же, как для $\mathbb{T}^+$, т. е. геометрией Минковского. Однако происходящее при этом изменение фаз твисторов приводит к появлению «связности» на M, индуцированной электромагнитным потенциалом. Оказывается, эта связность соответствует тому же электромагнитному полю, которое получается контурным интегрированием, но теперь она описывает фотон в активной функции, поскольку описание в твисторном пространстве включает в себя форму взаимодействия фотона.

Использование в качестве базы расслоения в приведенной выше конструкции подмножества $\mathbb{PT}^+$ пространства $\mathbb{PT}$ связано с тем, что мы рассматриваем свободный фотон положительной частотности. Однако это построение можно провести и тогда, когда в качестве базы выбираются другие подмножества X в $\mathbb{PT}$.

Аналогичное построение может быть проведено и в случае гравитации, когда степень однородности f равна 2 (т. е. спиральность равна —2). Теперь невозмущенное пространство $\mathbb{T}^+$ рассматривается как расслоение в другом смысле: роль базы играет спинорное пространство $\pi_{A'}$, а отображением проекции является отображение $(\omega^A, \pi_{A'}) \to \pi_{A'}$.

Будем строить деформированное пространство τ с помощью двух открытых множеств U_1 и U_2 из $\mathbb{T}$ и функции f (степени однородности 2), определённой на пересечении $U_1 \cap U_2$. Чтобы получить τ U_1 и U_2 склеиваются по-другому, а именно для $\hat{Z}^\alpha \in U_1$ и $Z^\alpha \in U_2$ на пересечении $U_1 \cap U_2$ функция перехода определяется следующим образом:

$$\hat{Z}^\alpha = exp\left\{\epsilon^{AB}\frac{\partial f(Z)}{\partial \omega^A}\frac{\partial}{\partial \omega^B}\right\} Z. \tag{2.11}$$

Отсутствие в вышеприведенном соотношении производных по π означает, что твистор на одном лоскуте должен иметь такую же π-часть, что и согласованный с ним твистор на соседнем лоскуте. Отсюда следует, что операция «проектирования» спинора π из пространства τ имеет согласованный характер во всем этом пространстве. То есть имеет место глобальная проекция пространства τ на пространство спиноров π. Таким образом, τ представляет собой расслоение над пространством π. Каждый слой оказывается комплексным 2-многообразием с симплектической структурой, как и само пространство π.

По деформированному пространству τ можно построить теперь искривлённое комплексное пространство Минковского. Оно называется нелинейный гравитоном. Вся схема построения нелинейного гравитона указана на рисунке 2.5.

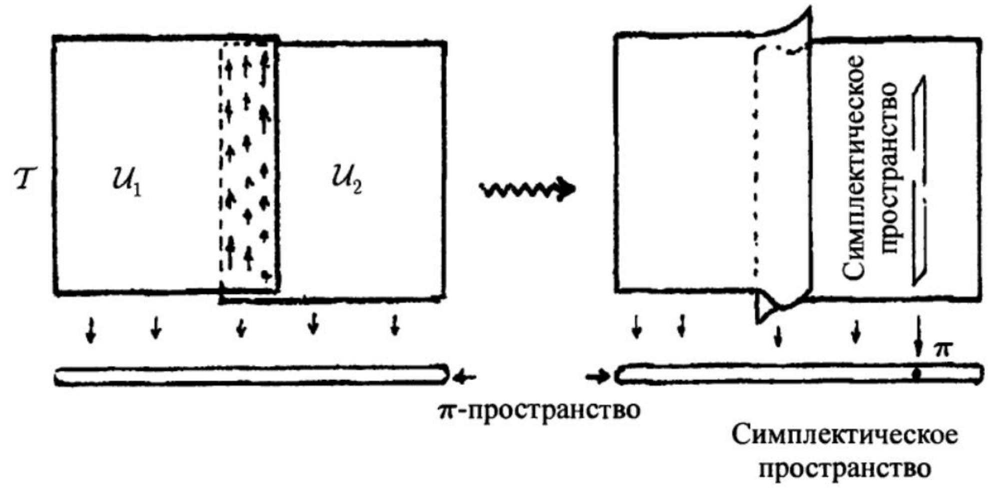

Рисунок 2.4 — Искривлённое твисторное пространство τ проецируется на пространство π-спиноров

.

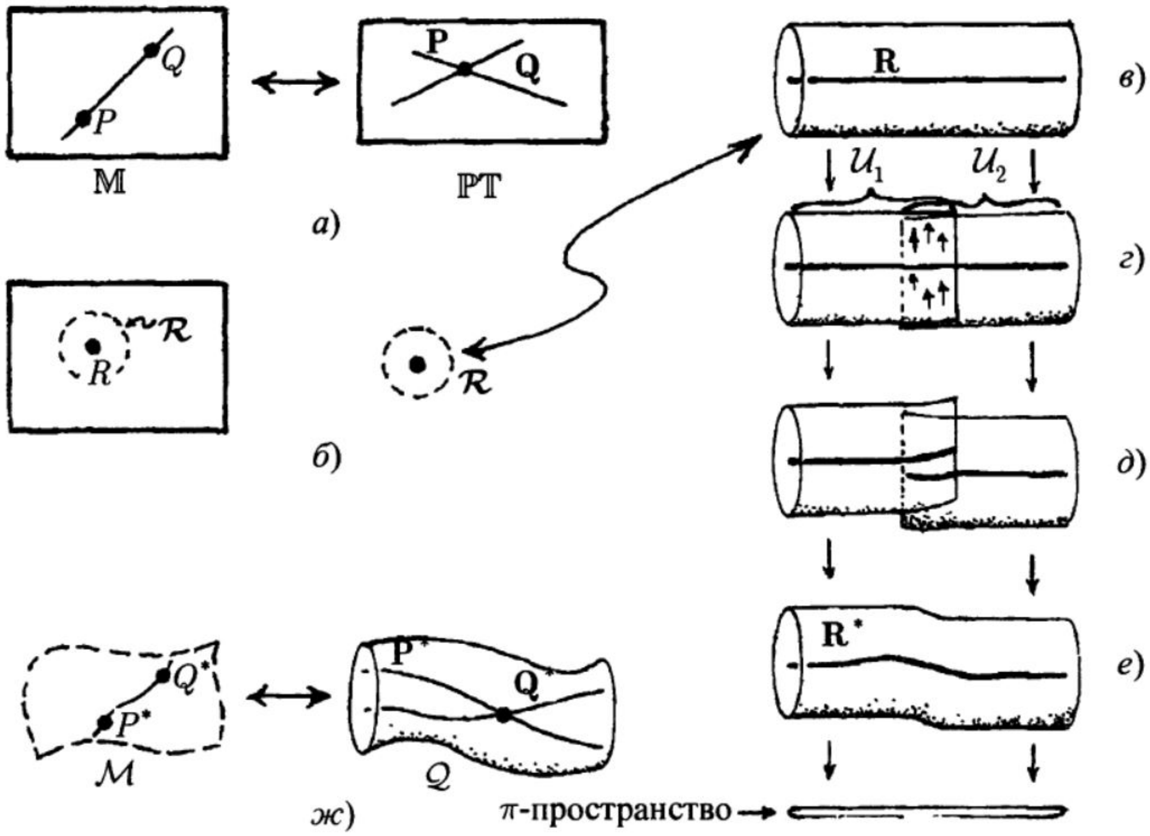

Рисунок 2.5 — Схема построения нелинейного гравитона

.

Опишем построение нелинейного гравитона. а) При стандартном твисторном соответствии для плоского пространства точки P и Q пространства $\mathbb{CM}$ разделены нулевым интервалом всякий раз, когда пересекаются линии P и Q в пространстве $\mathbb{PT}$. б) Мы хотим каким-то образом деформировать $\mathbb{PT}$ в искривленное твисторное пространство τ, однако математические теоремы утверждают, что это нельзя сделать глобально. В соответствии с этим в качестве нашего исходного пространства-времени мы возьмем лишь небольшую окрестность U точки R в $\mathbb{CM}$. в) Этой окрестности соответствует трубчатая окрестности Q линии R в $\mathbb{PT}$. г) Теперь деформируем область Q, которая разита на два множества U_1 и U_2. д) Исходная линия R теперь разрывается и не может использоваться для однозначного определения «пространственно-временной точки». е) На выручку приходит теорема Кодаиры, из которой следует, что существует 4-параметрическое семейство «линий» R^*, которое может служить для этой цели. ж) Точки искомого пространства «нелинейного гравитона» M (комплексного 4-пространства) определяются кривыми Кодаиры R^*. Комплексная конформная метрика пространства M определяется (как и в случае а) условием, что точки P^* и Q^* разделены нулевым интервалом при пересечении соответствующих линий P^* и Q^* в τ.

Таким образом, получается деформированное пространство Минковского M, которое является пространством сечений расслоения τ. Две точки в этом пространстве изотропно расположены, если соответствующие сечения пересекаются. Задаваемую этим определением комплексную конформную структуру на M можно продолжить до полной комплексной римановой метрики g_{ab} на M. Оказывается, что эта метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна в пустоте $R_{ab} = 0$..

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория твисторов представляет собой набор нелокальных конструкций с корнями в проективной геометрии девятнадцатого века. К настоящему моменту идеи твисторов были расширены и обобщены во многих различных направлениях и применены ко многим совершенно различным проблемам математики и физики. Особенностью этой теории является соответствие между точками в пространстве–времени и голоморфными кривыми в твисторном пространстве. Уравнения Эйнштейна и уравнения Янга–Миллса в пространстве–времени заменяются алгебро-геометрическими задачами в твисторном пространстве.

Недавно была решена проблема описания гравитона со спиральностью 2, которая описывается твисторной функцией степени однородности -6. степенью однородности -6.) Это позволило включить в теорию как левополяризованную, так и правополяризованную часть гравитона.

На настоящий момент теория твисторов не является завершённой. Имеется ряд проблем с описанием массивных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.Г.Сергеев. Геометрия твисторов и калибровочные поля, 2018.

[2] Penrose, Roger (1977), "The Twistor Programme Reports on Mathematical Physics, 12 (1): 65–76

[3] Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной: Полный путеводитель / Пер. с англ. А. Р. Логунова, Э. М. Эпштейна. — М., Ижевск, 2007.

[4] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени / Пер. с англ. — М.: Мир. 1988. — 572 с.

[5] Atiyah, M., Dunajski, M., and Mason, L. J. (2017). "Twistor theory at fifty: from contour integrals to twistor strings". Proc. R. Soc. A. 473

[6] Baird, P., "An Introduction to Twistors."

[7] Penrose, Roger (1999) "The Central Programme of Twistor Theory,"Chaos, Solitons and Fractals 10: 581–611.

[8] В. В. Прасолов. Элементы теории гомологий. — М.: МЦНМО, 2006.

[9] Твисторы и калибровочные поля: Сборник статей / Под ред. В. В. Жаринова. — М.: Мир, 1983.