Massive gravity

Polina Petriakova, M19–115

October 2020

1 Введение

Гравитация является первым взаимодействием, которое было описано математической теорией. Аристотель (IV в.д.н.э.) считал, что объекты с разной массой падают с разной скоростью, но в 16 веке Галилео Галилей экспериментально определил, что это не так: без учета сопротивления воздуха все тела ускоряются одинаково. Далее в 1687 г. Исааком Ньютоном был получен закон всеобщего тяготения, хорошо описывающий общее поведение гравитации. В 1915 г. Альберт Эйнштейн [1] создал Общую теорию относительности, более точно описывающую гравитацию в терминах геометрии пространства-времени. Четырехмерное пространство-время в этой теории становится искривленным и основной характеристикой является метрический тензор, зависящий от четырехмерных координат.

Данная теория описывается действием

$$S_{GR} = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\, R\,\sqrt{-g} + S_{matter} \tag{1}$$

и приводит при вариации действия по метрическому тензору к уравнениям

$$\delta S_{GR} = 0 \;\rightarrow\; \underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} = \kappa T_{\mu\nu}\,,\ \text{где}\ T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{matter}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2}$$

Общая теория относительности была подтверждена экспериментально с высокой точностью по трем классическим тестам: по отклонению светового луча в поле небесного тела, смещению перигелия Меркурия и гравитационному красному смещению. В 1923 г. Александром Фридманом [2] были получены нестационарные решения уравнений Эйнштейна, в результате которых Вселенная должна либо расширяться, либо сжиматься.

Решение уравнений Фридмана, в предположении, что видимая материя описывается простейшим тензором энергии–импульса пылевидной материи, приводит к расширению Вселенной с замедлением. В 1930 г. Эдвин Хаббл [3] обнаружил пропорциональность красного смещения объектов и расстояний до них, сформулировав эмпирический закон красного смещения (закон Хаббла) для галактик, согласующийся с решениями уравнений Эйнштейна, полученных Фридманом. Однако в 1998 г. группа под руководством Перлмуттера, Шмидта и Рисса [4], [5] смогла измерить постоянную Хаббла на сверхбольших космологических расстояниях ($\sim$ млрд св. лет) и обнаружила, что Вселенная в возрасте $\sim 6 \div 7$ млрд лет начала ускоренно расширяться и продолжает на текущий момент времени. Данный результат тщательно перепроверялся в течение нескольких лет на предмет систематических ошибок, но в дальнейшем был признан верным и отмечен нобелевской премией 2011 г.

Стандартная космологическая ΛCDM – модель, способная объяснить современное ускоренное расширение Вселенной, является наиболее общепризнанной. В данной модели вводятся понятия космологической постоянной Λ и скрытой массы DM таким образом, что

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{visible} \to G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^{visible} + T_{\mu\nu}^{DM}\right) , \tag{3}$$

и в простейшем случае Λ–член интепретируется как тензор энергии-импульса вакуума, который имеет следующую структуру

$$T_{\mu\nu}^{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \,\mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1) \stackrel{def}{=} (\rho^{vac}, \mathrm{p}^{vac}, \mathrm{p}^{vac}, \mathrm{p}^{vac}) \Rightarrow \tag{4}$$

$$\rho^{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \,, \ \mathrm{p}^{vac} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \,; \quad G_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^{visible} + T_{\mu\nu}^{DM} + T_{\mu\nu}^{vac}\right) . \tag{5}$$

В таком случае, одно из уравнений Фридмана:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\,(\rho + 3p) \tag{6}$$

позволяет получить режим $\ddot{a} > 0$ и тем самым описать ускоренное расширение Вселенной, так как при добавлении Λ–члена, слагаемое

$$(\rho + 3p) = -\frac{2\Lambda}{8\pi G} + \underbrace{(\rho + 3p)^{vis}}_{>0} + \underbrace{(\rho + 3p)^{DM}}_{>0} < 0 \tag{7}$$

в правой части (6) может быть отрицательным.

Несмотря на успех согласованной космологической Λ CDM – модели, которая хорошо описывает: образование структур, образование химических элементов, возникновение флуктуаций реликтового излучения, современное ускоренное расширение Вселенной — природа происхождения ключевых составляющих понятий концептуально не ясна.

Другой возможностью объяснить ускоренное расширение Вселенной без введения скрытой массы и темной энергии может быть модифицированная теория гравитации. Теорий модифицированной гравитации существует бесчисленное множество, при этом каждая из них использует принципиально отличный от других подход. Существуют скалярно-тензорные теории гравитации, теории с нарушенной Лоренц-инвариантностью, теории гравитации с высшими производными, в многомерном пространстве и многие другие (см. обзоры [6], [7], [8], [9]).

Одной из таких модифицированных теорий является массивная гравитация. Основная идея заключается в том, что гравитон имеет небольшую массу, но отличную от нуля. В случае безмассового гравитона мы получаем стандартный Ньютоновский потенциал взаимодействия с бесконечным радиусом действия, но, наделяя гравитон отличной от нуля массой m, мы получаем потенциал Юкавы:

$$U_N = -\frac{GM}{r} \to U = -\frac{GM}{r}\mathrm{e}^{-mr}\,, \tag{8}$$

где m очень мала. Предположим, что масса гравитона

$$m \sim \frac{1}{R_{Horizon}} \sim 10^{-33}\mathrm{eV}\,, \tag{9}$$

тогда для малых космологических расстояний $r \ll R_H \to \mathrm{e}^{-mr} \sim 1$ и различие между потенциалами отсутствует. Однако на расстояниях порядка космологического горизонта, множитель e^{-mr} начинает работать и обрезает взаимодействие, силы гравитации слабеют, следовательно, удаленные части Вселенной притягивают друг друга слабее. Таким образом, при наличии у гравитона массы, Юкавское обрезание радиуса действия ослабляет взаимное притяжение удаленных частей Вселенной и Вселенная расширяется быстрее. Проблема малости космологической постоянной в данной теории заменяется малостью массы гравитона, но стоит отметить, что Λ – является аддитивной перенормировкой, в то время как масса m – мультипликативной и гораздо естественнее, когда произведение остается малым, нежели разность затравочной и учитывающей радиционные поправки величин (как в случае с Λ).

Основная трудность заключается в устранении лишних степеней свободы в теории массивной гравитации, и этому будет посвящены последующие главы, следуя исторической хронологии развития данной теории.

2 Линейная теория Фирца–Паули

Для того чтобы лучше понять проблемы, возникающие при попытке модифицировать гравитационное взаимодействие на больших расстояниях, полезно будет начать рассмотрение с лоренц-инвариантной модели массивной гравитации. Лоренц-инвариантный массовый член был впервые предложен Фирцем и Паули. В 1939 г. Фирц и Паули [10] рассмотрели теорию свободных, невзаимодействующих массивных гравитонов в пространстве Минковского.

2.1 Свободные безмассовые гравитоны в пределе слабого поля

Начнем с рассмотрения случая безмассовых свободных гравитонов в пределе слабого поля

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\ ,\ \ h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}\,. \tag{10}$$

В таком случае тензор Эйнштейна принимает следующий вид

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Big(\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\left(\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h\right) + \partial^2_{\mu\nu}h\Big) + O(h^2) \tag{11}$$

где $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ и $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$.

Домножая полученное выражение (11) на -2, пользуясь уравнениями Эйнштейна (2), вводим понятие линеризованного оператора Эйнштейна:

$$\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Чтобы выяснить его свойства, возьмем 4-дивергенцию от (12):

$$\partial^\mu\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} = -2\kappa\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial^\mu\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{13}$$

что является следствием второй теоремы Нетер. Если это выполняется, теория будет допускать калибровочную инвариантность. Можно также показать, что при калибровочных преобразованиях оператор

$$h_{\mu\nu} \to h^{'}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu\ \ \Rightarrow\ \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h'_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}\,. \tag{14}$$

Уравнения (11) можно упростить введением величины $\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \dfrac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$

$$\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha\widetilde{h}_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial^\alpha\widetilde{h}_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\widetilde{h}_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\mu\nu}\,, \tag{15}$$

при этом калибровочные преобразования становятся

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} \to \widetilde{h}'_{\mu\nu} = \widetilde{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\xi_\alpha\ ,\ \partial^\mu\widetilde{h}_{\mu\nu} \to \partial^\mu\widetilde{h}_{\mu\nu} + \Box\xi_\nu\,. \tag{16}$$

Эти преобразования могут быть использованы для наложения калибровочных условий, например, введем калибровку Лоренца $\partial^\mu\widetilde{h}_{\mu\nu} = 0$, тогда

$$\partial^\mu\widetilde{h}_{\mu\nu} = 0 \ \xrightarrow{(15)}\ \Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}\,. \tag{17}$$

При обращении $T_{\mu\nu} = 0$ из полученного уравнения (17) следует, что $\widetilde{h}_{\mu\nu}$ являются гармоническими функциями, следовательно, если ξ тоже являются гармоническими, т.е. $\Box\,\xi_\nu = 0$, то преобразованная функция $\widetilde{h}'_{\mu\nu}$ (16) тоже является гармонической и не меняет калибровки Лоренца. Это означает, что калибровочная свобода не полностью фиксирована и помимо рассмотренной калбировки можно наложить еще 4 дополнительных условия. Они могут быть выбраны по-разному. Рассмотрим бесследовую поперечную калибровку (так называемую TT–калибровку), где

1. $\widetilde{h} = \eta^{\alpha\beta}\widetilde{h}_{\alpha\beta} = 0 \ \Rightarrow\ \widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$,
2. $\widetilde{h}_{0i} = h_{0i} = 0$,
3. $\partial^\mu h_{\mu 0} = 0 \xrightarrow{2.} h_{00} = 0$.

Решая в такой калибровке уравнение $\Box h_{\mu\nu} = 0$, можно показать, что для гравитационной волны, распространяющейся вдоль оси Oz будет виден эффект двух поляризаций и

$$h_{\mu\nu}(t,z) = \cos\big(\omega(t-z)\big)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{18}$$

где h_+, h_x – два вещественных числа, соответствующие 2 поляризациям. Тогда метрика

$$\begin{aligned} ds^2 =& \big(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\big)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \Big(1 + h_+\cos\big(\omega(t-z)\big)\Big)dx^2 - \\ & - 2h_x\cos\big(\omega(t-z)\big)dxdy - \Big(1 - h_+\cos\big(\omega(t-z)\big)\Big)dy^2 - dz^2\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как тензор $h_{\mu\nu}$ имеет 10 компонент, а калибровки Лоренца и бесследования поперечная накладывают $4+4$ дополнительных связи на компоненты, получаем $10-4-4=2$ степеней свободы.

Теперь вернемся к теории Фирца и Паули. По аналогии с рассмотренным случаем безмассового гравитона, чтобы сделать его массивным необходимо ввести члены линейные по полю гравитонов $h_{\mu\nu}$ и $h\eta_{\mu\nu}$ с какими-то коэффициентами. Исторически уравнения (11) были изменены следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} + c_1 h_{\mu\nu} + c_2 h\eta_{\mu\nu}\ ,\ c_1 = m^2\ ,\ c_2 = -m^2\ . \tag{20}$$

Можно показать, что при вариации действия вида

$$S_{FP} = \int d^4x \left[\frac{1}{\kappa}\mathscr{L}_2 - m^2 U + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right]\ ,\ \text{где} \tag{21}$$

$$\mathscr{L}_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}(\partial_\alpha h_{\mu\nu})^2 + (h^\alpha)^2 - \partial_\alpha h\cdot h^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\alpha h)^2\right)\ ,\ U = \frac{1}{8}\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right). \tag{22}$$

приходим к уравнениям Фирца–Паули

$$\begin{aligned}\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \partial^2_{\mu\nu}h + \eta_{\mu\nu}\left(\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h\right) = \\ = m^2\left(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}\right) - 2\kappa T_{\mu\nu}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Аналогия добавления массового слагаемого тривиальна: если известны уравнения безмассового поля $\Box\phi = 0$, то чтобы сделать его массивным в простейшем случае $\Box\phi = m^2\phi$. Поэтому, возвращаясь к гравитону, мы получили уравнения (11), которые описывают гравитоны и для наделения их массой добавили по аналогии массовые слагаемые, линейные по полю.

Мы знаем, что безмассовые гравитоны обладают двумя степенями свободы (2 поляризации у гравитационных волн), массивная же частица со спином $s=2$ будет иметь $2s+1=5$ степеней свободы и, как говорилось выше, у $h_{\mu\nu}$ – 10 независимых компонент, следовательно на 5 из них мы должны наложить некоторые связи. Из следствия калибровочной инвариантности (13) линеаризованного оператора Эйнштейна получаем

$$\partial^\mu\left(\Box\, h_{\mu\nu} + ...\right) = 0 = -2\kappa\underbrace{\partial^\mu T_{\mu\nu}}_{=0} + m^2\left(\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h\right)\ \Rightarrow \tag{24}$$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = 0\,. \tag{25}$$

Мы получили 4 дополнительных условия, а из следа уравнения (23)

$$0 = -3m^2 h - 2\kappa T \;\rightarrow\; h = -\frac{2}{3}\frac{\kappa T}{m^2} \tag{26}$$

находим последнее из необходимых. Используя найденные связи, приходим к упрощенным уравнениям Фирца–Паули

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h = m^2 \left(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}\right) - 2\kappa T_{\mu\nu}; + \left\{ \partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h\,; h = -\frac{2}{3}\frac{\kappa T}{m^2} \right\}. \tag{27}$$

Рассмотрим полученные уравнения в пустоте, т.е. $\kappa T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow T = 0$:

$$\left(\Box - m^2\right) h_{\mu\nu} = 0\,; + \left\{\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0\,; h = 0\right\}. \tag{28}$$

Полученные уравнения описывают массивные гравитационные волны в плоском пространстве. Следовательно, массивный гравитон, распростаняющийся вдоль оси Oz, описывается решением:

$$h_{\mu\nu}(t,z) = \cos\left(\omega t - kz\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos\left(\omega t - kz\right) \begin{pmatrix} 0 & \upsilon_1 & \upsilon_2 & 0 \\ \upsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \cos\left(\omega t - kz\right) \begin{pmatrix} 2s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^2 = k^2 + m^2\,. \tag{29}$$

где первое слагаемое – тензорная часть поля, второе – векторная часть поля и последнее – скалярная часть поля. Элементарной проверкой можно убедиться в справедливости полученного результата, ведь $\cos\left(\omega t - kz\right)$ является гармонической функцией, 4-дивергенция есть умножение полученного результата для $h_{\mu\nu}$ на волновой вектор k^μ, который для гравитона, распространяющегося вдоль выбранной оси Oz $k^\mu = (\omega, 0, 0, 0)$ и след каждой матрицы равен нулю.

Таким образом, рассмотренные уравнения в линейной теории Фирца–Паули (23) для массивных гравитонов, на первый взгляд, должны приводить к предсказаниям ОТО в пределе $m \rightarrow 0$. Однако это не так.

2.2 Предел $m \to 0$ в линейной теории Фирца–Паули

2.2.1 Скачок Ван Дама–Вельтмана–Захарова

В безмассовом пределе $m \to 0$ однако в рассмотренной раннее теории при вычислении силы гравитационного притяжения между двумя телами не воспроизводится потенциал Ньютона:

$$U_{FP} = -\frac{4}{3}\frac{\kappa M_1 M_2}{8\pi r}\mathrm{e}^{-mr} \xrightarrow{m\to 0} \frac{4}{3}U_N\,. \tag{30}$$

Дополнительное притяжение обусловлено тем, что в полученном ранее результате (29) в безмассовом пределе отцепляются векторные моды, но скалярная мода сохраняется. Это можно показать, пользуясь введением полей Штюкельберга $\chi_{\mu\nu}$, A_μ, ϕ, которые позволяют восстановить калибровочную инвариантность для массивной теории введением искуственных полей

$$h_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu} + \frac{1}{m}\left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{m^2}\partial^2_{\mu\nu}\phi. \tag{31}$$

Тогда уравнения Фирца–Паули принимают вид

$$\left(\Box - m^2\right)\chi_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\left(\chi - \phi\right) - m\left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) = -2\kappa T_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\kappa T\eta_{\mu\nu}. \tag{32}$$

И в безмассовом пределе $m \to 0$ приходим к тому, что скадярная мода оказывается связанной с источником:

$$\Box\phi = -\frac{2}{3}\kappa T. \tag{33}$$

Добавление в теорию гравитации массового члена Фирца-Паули изменяет гравитационное взаимодействие как между двумя массивными телами, так и между массивным телом и светом. Это взаимодействие представляется возможным рассчитать в приближении слабого поля [8].

Результат такого рассмотрения приводит к тому, что предсказание для отклонения луча света массивным телом отличается от предсказания ОТО даже в пределе нулевой массы гравитона, это свойство и было исследовано Ван Дамом–Вельтманом–Захаровым (далее ВДВЗ) [11], [12]: линеаризованная теория Фирца-Паули не переходит в линеаризованную ОТО при $m \to 0$.

2.2.2 Решение Ван Дама–Вельтмана–Захарова

В линейной теории Фирца-Паули удается получить аналог линеаризованного решения Шварцильда и впервые это было получено Ван Дамом–Вельтманом–Захаровым [11], [12].

В ОТО статическое и сферически симметричное гравитационное поле описывается известной метрикой Шварцшильда [13]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad r_g = 2GM\,. \tag{34}$$

При $r \gg r_g$ слагаемое в скобках $-\dfrac{r_g}{r}$ может рассматриваться как малая поправка к плоской метрике $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $h_{\mu\nu}$– малая поправка, а следовательно, удовлетворяет линеаризованным уравнениям Энштейна (11) и имеет отличные от нуля компоненты $h_{00} = h_{rr} = \dfrac{r_g}{r}$.

Рассмотрим в общем виде метрику

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(r)}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2dr^2 - R^2d\Omega^2\,, \quad R(r) = r\mathrm{e}^{\mu(r)/2}\,. \tag{35}$$

Разлагая в ряд по малостям ν, μ, λ, получаем

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(r)+\mu(r)}\left(1 + \frac{r\mu'(r)}{2}\right)^2dr^2 - r^2\mathrm{e}^{\mu(r)}d\Omega^2 \Rightarrow \tag{36}$$

$$h_{\mu\nu} \approx \nu(r)dt^2 - \Big(\lambda(r) + \big(r\mu(r)\big)'\Big)dr^2 - \mu(r)r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{37}$$

В безмассовой теории, подставляя полученные выражения в уравнения Фирца–Паули, мы бы получили $\nu(r) = -\lambda(r) = \dfrac{const}{r}$, что в точности соответствует метрике Шварцильда. Но в массивной линеаризованной теории Фирца–Паули (23), получаем систему уравнений на неизвестные функции $\nu(r), \mu(r), \lambda(r)$, разрешая которое, приходим к окончательному виду решения ВДВЗ:

$$\nu(r) = -\frac{2c}{r}\mathrm{e}^{-mr}\,; \quad \lambda(r) = \frac{c}{r}(1 + mr)\mathrm{e}^{-mr}\,; \quad \mu(r) = c\frac{1 + mr + (mr)^2}{m^2r^3}\mathrm{e}^{-mr}\,. \tag{38}$$

В случае $r \ll \dfrac{1}{m}$, т.е. в области, где масса гравитона не играет особой роли:

$$\nu(r) = -\frac{2c}{r}; \quad \lambda(r) = \frac{c}{r}; \quad \mu(r) = \frac{c}{m^2r^3} \tag{39}$$

и равенство, справедливое в безмассовом случае, $\nu(r)+\lambda(r)=0$ уже не выполняется. При достаточно больших r: $\mu(r)$– мало

$$R = r\mathrm{e}^{\frac{\mu(r)}{2}} = r\left(1+\frac{\mu}{2}\right), \to r = R\left(1-\frac{\mu}{2}+...\right), \; \nu = -\frac{2c}{r} = \frac{2c}{R}+...\,; \; \lambda = \frac{c}{R}+.... \tag{40}$$

Решая уравнение геодезической для полученной метрики, можем найти аналог закона Ньютона, который оказывается

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(R)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(R)}dR^2 - R^2 d\Omega^2 \xrightarrow[\text{реш. ур. геодезич.}]{\ddot{x}^\mu+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta=0} \ddot{R} = -\frac{c_0}{R^2}. \tag{41}$$

Неизвестную константу c_0 можно восстановить из вычисления отклонения луча света и она оказывается равной после вычислений $c_0 = \dfrac{4}{3}GM$ и мы получили результат (30), с которого начали.

Такой результат должен был бы закрыть теорию Фирца-Паули, так как экспериментальные данные по отклонению света с большой точностью согласуются с ОТО.

2.2.3 Радиус Вайнштейна

Однако Аркадием Вайнштейном [14] в 1972 г. было показано, что в массивной гравитации линейный режим, в котором возникает данная проблема, оправдан, если пренебречь нелинейными поправками, что справедливо на расстояниях больших, чем радиус Вайнштейна:

$$r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5}. \tag{42}$$

Существует достаточно большой объем, только лишь вне которого возникакет проблема с безмассовым пределом линейной теории Фирца-Паули. Например, для Солнечной системы, подставляя гравитационный радиус Солнца $r_g = 3$ км, радиус Вайнштейна оказывается $r_V \sim 10^6$ св. лет. В ОТО линейное приближение справедливо на расстояних много больших, чем радиус Шварцшильда источника и отклонение света гравитационным полем вблизи поверхности Солнца, таким образом, хорошо описывается в линейном режиме. В теории Фирца-Паули же линейное приближение становится применимым лишь при $r \gg r_V$. Следовательно, на расстояниxя $r < r_V$ необходимо рассматривать нелинейную теорию .

3 Нелинейная теория Фирца–Паули

При обобщении линейной массивной теории Фирца–Паули постулируется существование некоторой нединамической ("опорной") метрики $f_{\mu\nu}$. Из двух используемых метрик $g_{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu}$ конструируется тензор

$$S^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} \,; \quad Tr\big(S^{\mu}_{\nu}\big) \equiv [S] \,, \tag{43}$$

из которого можно построить скаляры, определяющие потенциал. Тогда действие (21) принимает вид

$$S_{FP} = \int d^4x \left[\frac{1}{\kappa}\mathscr{L}_2 - m^2 U\big(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}\big) + \mathscr{L}_{matter}\right] , \tag{44}$$

где $U\big(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}\big) = U\big([S], [S^2], [S^3]...\big)$.

Таким образом, нелинейное обощение теории Фирца–Паули есть биметрическая теория, содержащая динамическую метрику $g_{\mu\nu}$ и нединамическую $f_{\mu\nu}$ (фиксирована с точностью до преобразования координат). Потенциал в такой теории задается как функция следов тенхора S^{μ}_{ν}. При этом никаких органичений на вид метрики $f_{\mu\nu}$ и на вид потенциала $U\big(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}\big)$ нет. Единственное ограничение на вид метрики $f_{\mu\nu}$: необходимо, чтобы в пределе слабой связи это обобщение сводилось к линейной теории Фирца–Паули. Многие современные теории массивной гравитации отличаются только выбором потенциала.

3.1 Обобщение Огиевского-Полубаринова

В 1965 г. впервые была рассмотрена нелинейная теория Фирца-Паули Огиевским и Полубариновым [15]. Им удалось однозначно восстановить кинетический член S_{EH} и потенциал был выбран следующим образом

$$U\big(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}\big) = \frac{1}{4n^2}(\det S)^{-\frac{s}{2}}[S^n] \,, \tag{45}$$

где s, n–вещественные числа. Однако в их теории отсутствовал предел, приводящий к линейой теории Фирца–Паули и имелась лишняя степень свободы гравитона, приводящая к т.н. духу Бульвара-Дезера [16]. В пространстве параметров теории s и n можно построить эллипс, внутри которого существует предел к теории Фирца–Паули.

Удивительно, что в 2010 г. [17] де Рам-Габададзе-Толли (dRGT–theory) подобрали потенциал таким образом, что оказалось возможным исключить дух Бульвара-Дезера и это возможно в одной единственной точке пространства параметров теории s и n.

4 Феноменология в теориях бездуховой массивной гравитации

4.1 Экспериментальные ограничения на массу гравитона

Если бы гравитон обладал ненулевой массой, то скорость распространения гравитационных волн: $v_g^2 = 1 - m^2/E^2$ (при $c = 1$) и была бы отлична от скорости распространения света. Такое отличие можно обнаружить по наблюдению за сверхновой: сравнивая времена прихода электромагнитной волны и гравитационной от одного события. Полученное ограничение [18] на массу гравитона из такого рассмотрения $m < 10^{-23}$ эВ.

Альтернативным способом проверить скорость гравитационных волн и ограничить массу гравитона, не полагаясь на какие-либо предположения о фотоне, - это наблюдение за слиянием компактных объектов. Это позволяет получить частотную зависимость гравитационных волн и обнаружение гравитационных волн в Advanced LIGO могло бы тогда ограничить массу гравитона потенциально вплоть до $m < 10^{-29}$ эВ.

Масса гравитона также важна для создания первичных гравитационных волн во время инфляции. В работе [19] в результате анализа было показано, что масса гравитона открывает возможность генерации гравитационных волн во время инфляции с острым пиком, высота и положение которого зависят от массы гравитона.

Заметим, что современные ограничения существенно слабее предполагаемого изначально (9). Причина этого заключается в том, что эти ограничения не учитывают эффекты, возникающие из-за дополнительной поляризации в гравитационных волнах, которые присутствовали бы, если бы гравитон имел массу в лоренц-инвариантной теории как было показано выше.

4.2 Другие следствия

Одним из основных предсказаний массивной гравитации является наличие новых поляризаций для гравитационных волн. Хотя эта новая поляризация может быть не обнаружена в интерферометрах гравитационных волн, все же можно ожидать, что они приведут к обнаруживаемым эффектам в системах двойных пульсаров, замедление вращения которых находится в чрезвычайно хорошем согласии с ОТО, что имеет решающее значение для жизнеспособности теорий модифицированной гравитации.

Также как и одним из основных мотивов рассмотрения массивных теорий гравитации является их способность решать или, по крайней мере, обеспечивать новый взгляд на проблему космического ускорения. Добавление массы гравитона в значительной степени удерживает физику в малых масштабах. эквивалентно ОТО из-за механизма Вайнштейна. Однако он неизбежно изменяет гравитацию на больших расстояниях, то есть в инфракрасном диапазоне.

Нетривиальным следствием массивной гравитации является отсутствие пространственно-плоских или замкнутых решений FLRW [20], в то время как открытые решения FLRW разрешены [21]. Как показано в [20], отсутствие решений FLRW в массивной гравитации не следует рассматривать как наблюдательный недостаток теории. Напротив, механизм Вайнштейна гарантирует, что существуют неоднородные космологические решения, которые настолько близко аппроксимируют нормальные FLRW-решения ОТО в пределе $m \to 0$, насколько это необходимо. Скорее, это наличие нового физического масштаба длины $1/m$ в массивной гравитации, что приводит к неоднородности динамики в космологических масштабах. Если этот масштаб $1/m$ сравним с текущим радиусом Хаббла или больше его, то эффекты этих неоднородностей станут очевидными только в текущий момент времени, когда Вселенная локально выглядит однородной на протяжении большей видимой части.

Массивная гравитация и ее расширения, безусловно, демонстрируют решения для черных дыр, и если справедлив механизм Вайнштейна, то можно ожидать решения, достаточно близкие к решениям Шварцшильда и Керра в ОТО. Однако, как и в случае космологических решений, ситуация усложняется из-за отсутствия единственного статического сферически-симметричного решения, которое возникает из-за наличия дополнительных степеней свободы, а также из-за существования других ветвей решений, которые могут не быть физическим.

Также важным следствием является образование структур. В стандартной космологии образование структур объясняется возрастанием первичных возмущений, преимущественно на стадии доминирования материи. Оказывается, что и в массивной гравитации [23] представляется возможным получить корректное описание формирования структур.

5 Заключение

В период последнего десятилетия очередной раз произошло возрождение интереса к массивной гравитации как к потенциальной альтернативе общей теории относительности.

Многие первоначальные теоретические препятствия, которые стояли на пути создания согласованной теории массивной гравитации, оказались разрешимыми. Однако, вместе с этим возникает новый ряд проблем, которые будут иметь решающее значение для установления жизнеспособности теорий массивной гравитации. Сложность нахождения полноценных космологических решений и решений для черных дыр во многих из этих теорий (как в бездуховой массивной гравитации, так и в биграватации, а также в других расширениях или родственных моделях) затрудняет объяснение многих феноменологических фактов. Тем не менее, хорошо понятые отдельные части этих моделей могут быть использованы, чтобы многое сказать о феноменологии, не углубляясь в полные теории.

Список литературы

[1] A. Einstein: Annalen der Physik **49** (1916) 31;

[2] A. Friedman: Über die Krümmung des Raumes, Zeitschrift für Physik, **10** (1): (1922) 377–386;

[3] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences, (1929);

[4] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], Astron. J. **116** (1998) 1009;

[5] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. **517** (1999) 565;

[6] S. Nojiri, S.D. Odintsov, V.K. Oikonomou, Physics Reports **692** (2017), 1-104;

[7] Claudia de Rham, Andrew J. Tolley, Phys. Rev. D **101**, 063518 (2020);

[8] V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov, Physics-Uspekhi, **51(8)**: 759 (2008);

[9] Claudia de Rham, Living Rev. Relativity **17** 7 (2014);

[10] M. Fierz, W. Pauli, Proc. R. Soc. London A **173** 211 (1939);

[11] H. van Dam, M. Veltman, Nucl. Phys. B **22** 397 (1970);

[12] В. И. Захаров, Письма в ЖЭТФ **12** 447, (1970);

[13] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **1** (1916);

[14] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. B **39** 393 (1972);

[15] V.I Ogievetsky, I.V Polubarinov, Annals of Physics **35** (2): (1965);

[16] David G. Boulware, Stanley Deser, Phys. Rev. D. **6** (12): 3368–3382 (1972);

[17] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, Andrew J. Tolley, Physical Review Letters **106** (23): 231101. (2011);

[18] Clifford M. Will, Living Rev. Rel. **9**, 3 (2006);

[19] Emir A. Gumrukcuoglu, Sachiko Kuroyanagi, Chunshan Lin, Shinji Mukohyama and Norihiro Tanahashi, Class. Quant. Grav. **29**, 235026 (2012);

[20] G. D'Amico, C. de Rham, S. Dubovsky, G. Gabadadze, D. Pirtskhalava, et al., Phys. Rev. D **84**, 124046 (2011);

[21] Emir A. Gumrukcuoglu, Sachiko Kuroyanagi, Chunshan Lin, Shinji Mukohyama, JCAP **030**, 1111 (2011);

[22] Z. Berezhiani, D. Comelli, F. Nesti, L. Pilo, JHEP 0807:**130** (2008);

[23] M. V. Bebronne, P. G. Tinyakov, Phys. Rev. D **76** 084011 (2007);