

Кафедра физики элементарных частиц и космологии

Модель Калуцы-Клейна

Студент:

Семичева Маргарита

Преподаватель:

Хлопов Максим Юрьевич

Группа:

M19-115

Содержание

1	Введение	2
2	Механизм Калуцы-Клейна	3
2.1	Случай $\phi = const$	4
2.2	Случай $A_\alpha = 0$	4
2.3	Конформный рескейлинг	4
3	Компактифицированные теории	5
3.1	Механизм компактификации Клейна	5
3.2	Квантование заряда	6
4	Некомпактифицированные теории	7
4.1	Метрика	7
4.2	Уравнения поля	7
4.3	Материя из геометрии	8
5	Космологические следствия	9
5.1	Физика инфляции	10
5.2	Физика нуклеосинтеза	10
5.3	Случай однородной изотропной Вселенной	11
5.4	Криволинейная космология	12
6	Астрофизические следствия	13
6.1	Солитоны Калуцы-Клейна	13
6.2	Кандидаты в темную материю	13
7	Заключение	15

1. Введение

Предположение о том, что пространство может иметь больше трех пространственных измерений возникло еще в XX веке и до сих пор присутствует во множестве теорий. Идея объединить электромагнетизм и гравитацию, используя дополнительное пятое измерение, возникла независимо у Нордстрема [1] и Калуцы [2]. Нордстрем рассматривал скалярную теорию гравитации как составную часть электродинамики Максвелла еще до создания общей теории относительности. Калуца, в свою очередь, воспользовался уже имеющейся теорией гравитации Эйнштейна и показал, что пятимерная гравитация в вакууме содержит в себе четырехмерную гравитацию в присутствии электромагнитного поля и уравнения Максвелла.

Основной проблемой всех многомерных теорий является ненаблюдаемость дополнительных измерений в низкоэнергетическом приближении. Пытаясь разрешить данную проблему, Калуца наложил несколько искусственное ограничение («условие цилиндра») на координаты, таким образом, запретив пятому измерению прямо фигурировать в законах физики. Вклад Кляйна [3] состоял в том, чтобы сделать это ограничение менее искусственным, предложив правдоподобную физическую основу для компактификации пятого измерения. Модель Калуцы-Клейна предполагает, что дополнительные измерения компактны и имеют крайне малый размер порядка длины Планка $l_{Pl} = 1/M_{Pl}$. Несмотря на то, что практическое обнаружение дополнительных скрытых измерений выходило за рамки экспериментальных возможностей, данная модель была с энтузиазмом воспринята идеологами единой теории поля, и когда пришло время включить в теорию сильные и слабые взаимодействия путем расширения механизма Калуцы на более высокие измерения, предполагалось, что они тоже будут компактными.

Обсуждаемые многомерные модели обладают тремя ключевыми характеристиками:

- Материя в данных теориях - есть проявление геометрии: электромагнитное поле и поля Янга-Миллса, как и гравитационное поле, полностью содержатся в многомерном тензоре Эйнштейна $^{(4+d)}G_{AB}$, то есть в метрике и ее производных, и тензор энергии-импульса $^{(4+d)}T_{AB}$ при этом не вводится;
- Многомерная теория является минимальным расширением общей теории относительности, т. е. в ней нет модификации математической структуры теории. Единственное изменение заключается в том, что тензорные индексы работают от 0 до $(3 + d)$ вместо 0 до 3;
- Не предлагается никакого механизма, объясняющего, почему физика зависит от первых четырех координат, но не от дополнительных.

Основные следствия вышеперечисленных характеристик обсуждаются в пункте 2 данной работы. Также рассматриваются два частных случая теории: случай $\phi = const$ и случай $A_\alpha = 0$.

Существует три подхода к изучению многомерных теорий, каждый из которых приносит в жертву одну из ключевых особенностей: компактифицированные, проективные и некомпактифицированные теории. Компактифицированные и некомпактифицированные теории рассматриваются соответственно в пунктах 3 и 4. Пункт 5 содержит основные космологические следствия теории.

В данной работе заглавные латинские буквы A, B, \dots будут соответствовать индексам, пробегающим значения $0 \div 4$, а греческие α, β, \dots - индексам со значениями $0 \div 3$. Пятимерные величины обозначаются символом $\hat{}$, а новая пятая координата обозначается $y = x^4$. Четырехмерная метрическая сигнатура принята равной $(+, -, -, -)$. Вычисления приведены в естественной системе единиц с $c = \hbar = G = 1$.

2. Механизм Калуцы-Клейна

Уравнения Эйнштейна в пяти измерениях без пятимерного тензора энергии и импульса имеют вид:

$$\hat{G}_{AB} = 0, \quad (1)$$

что эквивалентно

$$\hat{R}_{AB} = 0, \quad (2)$$

где $\hat{G}_{AB} \equiv \hat{R}_{AB} - \hat{R} \hat{g}_{AB}/2$ - тензор Эйнштейна, \hat{R}_{AB} и $\hat{R} = \hat{g}_{AB} \hat{R}^{AB}$ - пятимерные тензор Риччи и скаляр Риччи соответственно, \hat{g}_{AB} - пятимерный метрический тензор. Здесь A и B пробегает значения $0 \div 4$. Эти уравнения можно получить из вариации пятимерного действия Эйнштейна:

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}} \int \hat{R} \sqrt{-\hat{g}} d^4x dy, \quad (3)$$

где $y = x^4$ представляет пятую координату, \hat{G} - пятимерная гравитационная постоянная.

Отсутствие источников материи в этих уравнениях отражает первое предположение Калуцы относительно характеристик многомерных теорий, а именно то, что материя является проявлением геометрии.

Пятимерные тензор Риччи и символы Кристоффеля имеют определение аналогичное четырехмерным:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{AB} &= \partial_C \hat{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \hat{\Gamma}_{AC}^C + \hat{\Gamma}_{AB}^C \hat{\Gamma}_{CD}^D - \hat{\Gamma}_{AD}^C \hat{\Gamma}_{BC}^D, \\ \hat{\Gamma}_{AB}^C &= \frac{1}{2} \hat{g}^{CD} (\partial_A \hat{g}^{DB} + \partial_B \hat{g}^{DA} + \partial_D \hat{g}^{AB}). \end{aligned} \quad (4)$$

Данные уравнения отражают вторую ключевую особенность подхода Калуцы к объединению: за исключением того факта, что тензорные индексы имеют значения от 0 до 4 вместо $0 \div 3$, вид уравнений аналогичен виду уравнений в теории Эйнштейна.

Для метрики $\alpha\beta$ -компоненты из \hat{g}_{AB} отождествляется с четырехмерным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, $\alpha 4$ -компоненты с электромагнитным потенциалом A_α и 44-компонента со скалярным полем ϕ . Таким образом, удобным способом параметризации метрики является:

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa \phi^2 A_\alpha \\ \kappa \phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где электромагнитный потенциал A_α масштабирован на константу κ , чтобы в дальнейшем получить правильные множители в действии. Если мы свяжем ее с четырехмерной гравитационной постоянной как $\kappa = 4\sqrt{\pi G}$, тогда, используя метрику (5) и применяя третью ключевую особенность теории Калуцы - условие цилиндра (т. е. полагая все производные по пятой координате равными нулю), увидим, что действие (3) состоит из трех компонент:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{\phi^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{4} + \frac{2\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi}{3\kappa^2 \phi^2} \right). \quad (6)$$

Далее с помощью метрики (5) и определений (4) обнаружится, что $\alpha\beta$ -, $\alpha 4$ - и 44-компоненты пятимерного уравнения поля (2) сводятся соответственно к следующим уравнениям поля [4] в четырех измерениях:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\alpha\beta}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\alpha (\partial_\beta \phi) - g_{\alpha\beta} \square \phi], \\ \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= -3 \frac{\partial^\alpha \phi}{\phi} F_{\alpha\beta}, \quad \square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - R g_{\alpha\beta}/2$ - тензор Эйнштейна, $T_{\alpha\beta}^{EM} \equiv g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}/4 - F_{\alpha}^{\gamma} F_{\beta\gamma}$ - электромагнитный тензор энергии-импульса и $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$. Как и предполагалось, всего $10 + 4 + 1 = 15$ уравнений, поскольку в пятимерной метрике (5) пятнадцать независимых элементов.

2.1 Случай $\phi = const$

В случае, когда скалярное поле ϕ постоянно в пространстве-времени, первые два уравнения (7) являются уравнениями Эйнштейна и Максвелла соответственно:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \phi^2 T_{\alpha\beta}^{EM}, \quad \nabla^{\alpha} F_{\alpha\beta} = 0, \quad (8)$$

где масштабный параметр κ в терминах гравитационной постоянной G (в четырех измерениях) определяется как:

$$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}. \quad (9)$$

Этот результат был первоначально получен Калуцей и Клейном, которые установили $\phi = 1$. Однако условие $\phi = const$ согласуется только с третьим из полевых уравнений (7), когда $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0$, как впервые было указано Джорданом [5] и Тири [6].

2.2 Случай $A_{\alpha} = 0$

Без учета «условия цилиндра» условие обращения в нуль электромагнитных потенциалов было бы не более чем выбором координат. Однако с условием цилиндра мы работаем в особой системе координат, так что теория становится не инвариантна относительно общих (т. е. пятимерных) преобразований координат. Таким образом, ограничение $A_{\alpha} = 0$ является физическим, а не просто математическим, и ограничивает нас «гравитонно-скалярным сектором» теории.

Такой подход приемлем в некоторых случаях: например, в моделях ранней вселенной, в которых динамически доминируют скалярные поля. Если пренебречь A_{α} -полями, то уравнение (5) принимает вид:

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

С этой метрикой, полевыми уравнениями (2) и тремя предположениями Калуцы о многомерных моделях, действие (3) сводится к:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \phi. \quad (11)$$

Это частный случай $\omega = 0$ действия Бранса-Дике [7]:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R\phi}{16\pi G} + \omega \frac{\partial^{\alpha} \phi \partial_{\alpha} \phi}{\phi} \right) + S_m, \quad (12)$$

где ω - безразмерная постоянная Бранса-Дикке. Значение этого параметра должно быть больше ~ 3600 , поэтому такая простая модель нежизнеспособна.

2.3 Конформный рескейлинг

Другой распространенный для анализа случай - это возможность масштабирования метрики и приведения гравитационной части действия (5) в каноническую форму: $\sqrt{-g}R/16\pi G$. Это можно сделать, переопределив $\phi^2 \rightarrow \phi$, а затем выполнив конформное масштабирование метрики

$$\hat{g}_{AB} \rightarrow \hat{g}'_{AB} = \Omega^2 \hat{g}_{AB}, \quad \Omega^2 = \phi^{-1/3}, \quad (13)$$

что приводит к рескейлингу канонического действия [11]:

$$S' = - \int d^4x \sqrt{-g'} \left(\frac{R'}{16\pi G} + \frac{\phi F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta}}{4} + \frac{\partial'^{\alpha} \phi \partial'_{\alpha} \phi}{6\kappa^2 \phi^2} \right). \quad (14)$$

3. Компактифицированные теории

3.1 Механизм компактификации Клейна

Первоначально теоретики единой теории поля посчитали, что предположение Калуцы о существовании пятого измерения носит несколько надуманный характер, так как зависимости физических величин от дополнительного измерения не наблюдалось. Ситуацию исправил Клейн, объяснив отсутствие зависимости крайней малостью дополнительного измерения.

Клейн предположил, что пятая координата должна быть пространственной (как и первые три), и присвоил ей два свойства: (1) круговую топологию S^1 ; и (2) малый масштаб. Согласно свойству (1) любая величина $f(x, y)$ (где $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $y = x^4$) становится периодической: $f(x, y) = f(x, y + 2\pi r)$, где r - параметр масштаба или «радиус» пятого измерения. Поэтому все поля можно разложить в ряд Фурье:

$$g_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\alpha\beta}^{(n)}(x) e^{iny/r}, \quad A_{\alpha}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_{\alpha}^{(n)}(x) e^{iny/r},$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)} e^{iny/r}, \quad (15)$$

где верхний индекс $^{(n)}$ относится к n -й моде Фурье. В соответствии с квантовой теорией эти моды несут в направлении y импульс порядка $|n|/r$. Здесь проявляется свойство (2): если r достаточно мало, тогда y -импульсы даже мод $n = 1$ будут настолько большими, что они станут недостижимыми для эксперимента. Следовательно, будут наблюдаться только моды $n = 0$, которые не зависят от y , как того требует теория Калуцы.

Наиболее существенные ограничения на масштаб r четвертого пространственного измерения накладывает физика частиц высоких энергий, которая исследует большие масштабы масс и, соответственно, малые масштабы длин (длина волны Комптона для массивных мод имеет порядок M^{-1}). В настоящее время эксперименты такого рода [8] накладывают ограничения на размер r меньше аттометра ($1 \text{ ам} = 10^{-18} \text{ м}$). Теоретики часто устанавливают r равным планковской длине $l_{pl} \sim 10^{-35} \text{ м}$, что является одновременно естественным значением и достаточно малым, чтобы гарантировать, что масса любых $n \neq 0$ фурье-мод превышает планковскую массу $m_{pl} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$.

Таким образом, чтобы избежать условия цилиндра, Клейн предположил, что дополнительное пространственное измерение компактифицируется в топологию круга S^1 очень малого радиуса r . В этом случае остается четырехмерная координатная инвариантность и абелева калибровочная инвариантность, связанная с преобразованиями координат S^1 . Таким образом, пространство имеет топологию $R^4 \times S^1$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим преобразование:

$$y \rightarrow y' = y + f(x), \quad (16)$$

$$\hat{g}_{AB} \rightarrow \hat{g}'_{AB} = \frac{\partial x^C}{\partial x'^A} \frac{\partial x^D}{\partial x'^B} \hat{g}_{CD}. \quad (17)$$

Тогда для преобразования (16):

$$A_{\alpha} \rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \partial_{\alpha} f(x). \quad (18)$$

Таким образом, мы видим, что преобразование (16) приводит к абелевому калибровочному преобразованию для A_α .

3.2 Квантование заряда

Разложение полей на моды Фурье предполагает возможный механизм объяснения зарядового квантования. Рассмотрим простейший вид материи - безмассовое пятимерное скалярное поле $\hat{\psi}(x, y)$. Его действие будет иметь только кинетическую часть:

$$S_{\hat{\psi}} = - \int d^4x dy \sqrt{-\hat{g}} \partial^A \hat{\psi} \partial_A \hat{\psi} . \quad (19)$$

Поле можно разложить аналогично (15):

$$\hat{\psi}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{\psi}^{(n)} e^{iny/r} . \quad (20)$$

Когда это разложение вводится в действие (19), мы получаем следующий результат [10]:

$$S_{\hat{\psi}} = - \sum_n \int dy d^4x \sqrt{-g} \left[D^\alpha \hat{\psi}^{(n)} D_\alpha \hat{\psi}^{(n)} - \frac{n^2 \hat{\psi}^{(n)2}}{\phi r^2} \right] , \quad (21)$$

где $D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{in\kappa A_\alpha}{r}$ - ковариантная производная. Сравнение с правилом минимальной связи в КЭД (под минимальной связью понимается связь между полями, которая включает только распределение заряда, а не более высокие мультипольные моменты распределения заряда) $\partial_\alpha \rightarrow \partial_\alpha + ieA_\alpha$ показывает, что в этой теории n -я мода Фурье скалярного поля $\hat{\psi}$ несет квантованный заряд:

$$q_n = \frac{n\kappa\phi^{-1/2}}{r} = \frac{n\sqrt{16\pi G}}{r\sqrt{\phi}} , \quad (22)$$

где A_α разделена на $\sqrt{\phi}$, чтобы получить правильный электромагнитный вклад в (14). Если отождествить $e = q_1$ и предположить, что $r\sqrt{\phi} \sim l_{pl} = \sqrt{G}$, мы получим как следствие правильный порядок величины структурной постоянной,

$$\alpha \equiv \frac{q_1^2}{4\pi} \sim \left(\frac{\sqrt{16\pi G}}{\sqrt{G}} \right)^2 / 4\pi = 4 . \quad (23)$$

Возможность объяснения таким образом фундаментальной константы сделала бы компактифицированную пятимерную теорию Калуцы-Клейна довольно важной для рассмотрения. Однако массы скалярных мод совершенно не совместимы с этими представлениями. Они даются квадратным корнем из коэффициента при $\hat{\psi}^{(n)2}$:

$$m_n = \frac{|n|}{r\sqrt{\phi}} . \quad (24)$$

Если, как предполагалось, $r\sqrt{\phi} \sim l_{pl}$, тогда для масса электрона $m_1 \sim l_{pl}^{-1} \sim 10^{19} \text{ГэВ}$ (соответствующая первой моде Фурье) была бы намного меньше, чем экспериментальное значение $m_e \approx 0,5 \text{МеВ}$. Это расхождение примерно на двадцать два порядка между теорией и наблюдением сыграло большую роль в дальнейшем отказе от объяснения квантования зарядов с помощью пятимерной теории Калуцы-Клейна.

В современных компактифицированных теориях эту проблему можно избежать, выполнив три действия [10]: (1) идентифицируя наблюдаемые (легкие) частицы, такие как электрон, с $n = 0$, а не с более высокими модами разложения Фурье, описанного выше. Согласно формуле (24), эти частицы имеют нулевую массу на уровне уравнений поля. Однако затем используются: (2) механизм спонтанного нарушения симметрии, чтобы наделить их небольшими массами. Из уравнения в формуле (22) также возникает проблема объяснения того, как моды $n = 0$ могут иметь ненулевой заряд (или, в более общем смысле, ненулевые связи с калибровочными полями). Это разрешается: (3) переходом к более высоким измерениям, где безмассовые частицы больше не являются «синглетами калибровочной группы», соответствующими основному состоянию.

4. Некомпактифицированные теории

В этом подходе не ограничивается топология и масштаб пятого измерения в попытке точно удовлетворить условию цилиндра. Вместо этого мы придерживаемся идеи, что новые координаты являются физическими. Физические величины, включая, в частности, полученные из метрического тензора, будут зависеть от пятой координаты. Фактически, именно эта зависимость позволяет получить не только электромагнитное излучение, но и материю очень общего вида из геометрии с помощью уравнений многомерного поля. Уравнения движения также модифицируются в зависимости от дополнительных координат. Без цилиндричности нет причин для компактификации пятого измерения, поэтому такой подход правильно называется «некомпактифицированным».

4.1 Метрика

Рассматривая пятимерную метрику (5), выберем координаты так, чтобы четыре компоненты A_α равнялись нулю. Поскольку больше не накладывается цилиндричность на решения, это не влечет за собой потери алгебраической общности; это аналогично обычной стратегии выбора координат в электромагнитной теории, при которой либо электрическое, либо магнитное поле исчезают. Пятимерный метрический тензор, таким образом:

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon\phi^2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где множитель ϵ введен для того, чтобы допустить как времяподобную, так и пространственноподобную сигнатуру для пятого измерения (требуется только, чтобы $\epsilon^2 = 1$).

Времяподобные дополнительные измерения редко рассматриваются в компактифицированной теории Калуцы-Клейна по нескольким причинам [11]: (1) они приводят к неправильному знаку для действия Максвелла в уравнении (6) относительно Эйнштейновского; и (2) из них следует неправильный знак для массы m_n заряженных мод в уравнении (21), т.е. к предсказанию тахионов. Уместность этих двух аргументов для некомпактифицированной теории может быть предметом споров. Третье распространенное возражение (3) состоит в том, что дополнительные временные или времениподобные измерения могли бы привести к замкнутым времениподобным кривым и, следовательно, допустить нарушение причинности. Стоит отметить отличие временных и времениподобных измерений: временные измерения на самом деле имеют физические единицы времени; времениподобные же просто имеют времениподобную сигнатуру.

4.2 Уравнения поля

Процедура получения уравнений поля в точности такая же, как в механизме Калуцы, за исключением того, что теперь мы сохраняем производные по пятой координате. Используя те же определения (4) пятимерных символов Кристоффеля и тензора Риччи, получаем выражения для $\alpha\beta$ -, $\alpha 4$ - и 44 -компонент пятимерного

тензора Риччи \hat{R}_{AB} , которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)}{\phi} + \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[\frac{\partial_4\phi(\partial_4g_{\alpha\beta})}{\phi} - \partial_4g_{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + g^{\gamma\delta}\partial_4g_{\alpha\gamma}\partial_4g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta}\partial_4g_{\gamma\delta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{2} \right], \\
\hat{R}_{\alpha 4} &= \frac{g^{44}g^{\beta\gamma}}{4} (\partial_4g_{\beta\gamma}\partial_\alpha g_{44} - \partial_\gamma g_{44}\partial_4g_{\alpha\beta}) + \frac{\partial_\beta g^{\beta\gamma}\partial_4g_{\gamma\alpha}}{2} \\
&\quad + \frac{g^{\beta\gamma}\partial_4(\partial_\beta g_{\gamma\alpha})}{2} - \frac{\partial_\alpha g^{\beta\gamma}\partial_4g_{\beta\gamma}}{2} - \frac{g^{\beta\gamma}\partial_4(\partial_\alpha g_{\beta\gamma})}{2} \\
&\quad + \frac{g^{\beta\gamma}g^{\delta\epsilon}\partial_4g_{\gamma\alpha}\partial_\beta g_{\delta\epsilon}}{4} + \frac{\partial_4g^{\beta\gamma}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}}{4}, \\
\hat{R}_{44} &= -\epsilon\phi\Box\phi - \frac{\partial_4g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{2} - \frac{g^{\alpha\beta}\partial_4^2g_{\alpha\beta}}{2} \\
&\quad + \frac{\partial_4\phi g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{2\phi} - \frac{g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_4g_{\gamma\beta}\partial_4g_{\alpha\delta}}{4},
\end{aligned} \tag{26}$$

где $\Box\phi \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)$ определяется так же, как в четырех измерениях.

Мы предполагаем, что не существует «многомерной материи», поэтому уравнения Эйнштейна принимают вид (2), $R_{AB} = 0$. Первое из уравнений (26) затем дает следующее выражение для четырехмерного тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)}{\phi} - \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[\frac{\partial_4\phi(\partial_4g_{\alpha\beta})}{\phi} - \partial_4g_{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + g^{\gamma\delta}\partial_4g_{\alpha\gamma}\partial_4g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta}\partial_4g_{\gamma\delta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{2} \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

Второе можно записать в виде закона сохранения:

$$\nabla_\beta P_\alpha^\beta = 0, \tag{28}$$

где мы определили новый четыре-тензор как:

$$P_\alpha^\beta \equiv \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}_{44}}} (g^{\beta\delta}\partial_4g_{\gamma\alpha} - \delta_\alpha^\beta g^{\gamma\epsilon}\partial_4g_{\gamma\epsilon}). \tag{29}$$

И третье из уравнений (26) принимает форму скалярного волнового уравнения для ϕ :

$$\epsilon\phi\Box\phi = -\frac{\partial_4g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{g^{\alpha\beta}\partial_4^2g_{\alpha\beta}}{2} + \frac{\partial_4\phi g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta}}{2\phi}. \tag{30}$$

Уравнения (27) – (30) составляют основу пятимерной некомпактифицированной теории Калуцы-Клейна. Остается только интерпретировать их значение в четырех измерениях, а затем применить их к любой данной физической проблеме, выбрав соответствующую метрику \hat{g}_{AB} .

4.3 Материя из геометрии

Первое из уравнений (27) – (30) позволяет нам интерпретировать четырехмерную материю как проявление пятимерной геометрии [12]. Для этого требуется, чтобы обычные уравнения Эйнштейна (с материей) выполнялись в четырех измерениях:

$$8\pi GT_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \tag{31}$$

где $T_{\alpha\beta}$ - тензор энергии-импульса. Используя уравнение (27) получаем (с помощью уравнения (30)) следующее выражение для четырехмерного скаляра Риччи:

$$R = \frac{\epsilon}{4\phi^2} [\partial_4g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta} + (g^{\alpha\beta}\partial_4g_{\alpha\beta})^2]. \tag{32}$$

Подставляя этот результат вместе с ур. (27), в уравнение (32), получаем:

$$8\pi GT_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)}{\phi} - \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[\frac{\partial_4\phi(\partial_4g_{\alpha\beta})}{\phi} - \partial_4(\partial_4g_{\alpha\beta}) \right] - \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[g^{\gamma\delta} \partial_4g_{\alpha\gamma} \partial_4g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta} \partial_4g_{\gamma\delta} \partial_4g_{\alpha\beta}}{2} \right] - \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{4} (\partial_4g^{\gamma\delta} \partial_4g_{\gamma\delta} + (g^{\gamma\delta} \partial_4g_{\gamma\delta})^2) \right].$$

Если мы используем это выражение для $T_{\alpha\beta}$, четырехмерные уравнения Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}$ автоматически содержатся в пятимерных вакуумных уравнениях $\hat{G}_{AB} = 0$. Материя, описываемая $T_{\alpha\beta}$, является проявлением чистой геометрии в многомерном мире. Это было названо «интерпретацией индуцированной материи» теории Калуцы-Клейна, и уравнение (33) определяет тензор энергии-импульса индуцированной материи.

Интерпретация уравнений (28)–(30) не так однозначна. Можно предположить, что, поскольку компоненты $\alpha\beta$ уравнений поля связывают геометрию с макроскопическими свойствами материи, так и компоненты $\alpha 4$ и 44 могут описывать микроскопические свойства. В частности, если

$$P_{\alpha\beta} = k(m_i v_\alpha v_\beta + m_g g_{\alpha\beta}), \quad (33)$$

где k - константа, m_i и m_g - инерционная гравитационная массы частицы в жидкости с индуцированным веществом, а $v^\alpha = dx^\alpha/ds$ - ее 4-скорость. Тогда уравнение (28) описывает четырехмерное геодезическое уравнение.

Точно так же мы можем придать уравнению (30) смысл, если мы отождествим его с уравнением Клейна-Гордона:

$$\square\phi = m^2\phi. \quad (34)$$

Тогда масса частицы явно зависит от метрики, что позволяет нам интерпретировать эту некомпактную теорию как реализацию принципа Маха [13].

5. Космологические следствия

В четырехмерной общей теории относительности подход к космологии лежит через изучение зависящих от времен решений уравнений движения, которые описывают развивающиеся вселенные. Эти же рассуждения можно применить и к теориям Калуцы-Клейна. Первый подобный анализ [20] относился к решениям пятимерной модели. Было предсказано, что одно измерение сжимается со временем, в то время как оставшиеся три пространственных измерения расширяются. Затем было получено решение для супергравитации в одиннадцати измерениях [21]. Справедливость этих моделей ограничена, однако, тем, что при изменении со временем масштаба внутренних измерений меняются и калибровочные константы. Возможность изменения фундаментальных констант со временем жестко ограничена экспериментальными данными. Выход из положения могла бы дать модель, в которой дополнительные измерения не сжимаются, а имеют какой-нибудь постоянный размер (вероятно, малый). Можно рассуждать и иначе: когда сжимающиеся внутренние измерения достигают планковской длины l_{pl} , квантовые эффекты, начинают доминировать. В результате эти измерения замораживаются при каком-то фиксированном по отношению к l_{pl} масштабе.

Важным шагом в космологии Калуцы-Клейна стала демонстрация того, что сжимающиеся со временем дополнительные измерения могут передавать энтропию в четырехмерную Вселенную, обеспечивая новый способ решения проблем горизонта и плоскостности [22], хотя требовалось много (~ 40) дополнительных измерений. Сама инфляция также была непосредственно включена в компактифицированные теории Калуцы-Клейна [23].

5.1 Физика инфляции

Широкий спектр возможностей может открыть инфляция в теориях Калуцы-Клейна или суперструн, в которых присутствует практически бесконечное число вакуумных состояний и вариантов компактификации исходного N -мерного пространства. Тип компактификации определяет константы связи, энергию вакуума, нарушения симметрии и, наконец, эффективную размерность пространства. Как было показано в работе [25], хаотическая инфляция при почти планковской плотности может приводить к локальному изменению числа компактифицированных измерений; вселенная оказывается разделенной на экспоненциально большие области различной размерности.

Иногда спектр различных возможностей непрерывен. Например, в рамках теории Бранса-Дикке эффективная гравитационная постоянная зависит от величины поля Бранса-Дикке, которое также флуктуирует в процессе инфляции. В результате вселенная после инфляции оказывается разделенной на экспоненциально большие части со всеми возможными значениями гравитационной постоянной G и амплитуды флуктуаций плотности $\frac{\delta\rho}{\rho}$ [26]. Инфляция может разделять вселенную на экспоненциально большие области с непрерывно меняющимся отношением чисел барионов и фотонов $\frac{n_B}{n_\gamma}$, и, соответственно, с галактиками, имеющими существенно различные свойства [27]. Инфляция может также непрерывно менять эффективное значение энергии вакуума (космологической постоянной Λ), что является необходимой предпосылкой для многих попыток найти решение проблемы космологической постоянной. В таких условиях самые разнообразные наборы параметров физики частиц (масс, констант связи, энергии вакуума и т.д.) могли возникнуть по окончании инфляционной стадии.

5.2 Физика нуклеосинтеза

В теориях с дополнительными измерениями зависимость фундаментальных констант от объема компактного пространства позволяет использовать первичный нуклеосинтез для исследования структуры компактных пространств в течение первых нескольких минут после большого взрыва. В таких теориях истинно фундаментальные константы определены в $4 + D$ измерениях, а наблюдаемые константы в четырехмерном мире являются результатом размерной редукции (сжатия) D компактных измерений. В таких моделях наблюдаемые основные константы зависят от объема (или радиуса) компактного D -пространства. Для простоты можно считать, что объем внутреннего пространства определяется одним радиусом $V_D \propto R^D$, который представляет собой средний радиус внутреннего пространства. Наблюдаемое постоянство фундаментальных констант тогда связано с постоянным размером дополнительных измерений. В работе [24] отмечено, что ко времени первичного нуклеосинтеза любое расширение или сжатие дополнительных измерений должно было затухнуть, чтобы придать дополнительным измерениям тот размер, который они имеют сегодня (с точностью до 1%).

Чтобы изучить влияние изменения фундаментальных констант можно использовать стандартную модель первичного нуклеосинтеза и рассчитать зависимость образования первичного гелия от G_N , G_F и Q , где $Q = M_n - M_p$ - разность масс нейтронных протонов. Эффект независимых вариаций G_N , G_F и Q показан на рис. 1. Количество ${}^4\text{He}$, образовавшегося в результате Большого взрыва, определяется нейтронно-протонным соотношением при замораживании (остановке) $n \leftrightarrow p$ реакций: $(n/p)_f = \exp(-Q/T_f)$. Температура замораживания T_f определяется темпом расширения Вселенной ($H = \dot{R}/R \propto (G_N/\rho)^{1/2}$) и временем свободного пробега нейтронов $\tau = \Gamma_{wk}^{-1} \propto G_F^{-2}$. Увеличение G_N приводит к увеличению скорости расширения, что позволяет слабым взаимодействиям замораживаться раньше и приводит к увеличению T_f и, следовательно, к увеличению количества первичного ${}^4\text{He}$. Поскольку константа Ферми G_F прямо пропорциональна скорости

слабого взаимодействия, уменьшение G_F вызовет замораживание слабых взаимодействий при более высокой температуре, снова увеличивая производство первичного гелия. При фиксированной температуре заморозки увеличение разницы масс нейтрона и протона приводит к экспоненциальному уменьшению начального отношения нейтронов к протонам и, следовательно, к уменьшению первичного ${}^4\text{He}$.

Количество первичного гелия наиболее зависит от величины Q . Для слабых изменений в величине $Q = Q_0 + \Delta Q$, где Q_0 - текущее значение (1,293 МэВ):

$$(n/p)_f = \exp(-Q/T_f) = \exp(-Q_0/T_f) \exp(-\Delta Q/T_f) = (n/p)_{f0} (1 - \Delta Q/T_f) , \quad (35)$$

поскольку $(n/p)_f$ меньше единицы. Откуда следует, что $(n/p)_f$ почти линейная функция ΔQ .

Изменение разности масс нейтрона и протона должно происходить из-за любого изменения постоянной тонкой структуры α . Параметризуем Q следующим образом:

$$Q = \alpha Q_\alpha + \beta Q_\beta , \quad (36)$$

где Q_α - электромагнитный вклад, Q_β учитывает любой неэлектромагнитный вклад. α и β - безразмерные параметры, которые могут меняться; предполагается, что Q_α и Q_β постоянны. Разумно ожидать $\alpha Q_\alpha = O(Q)$, т. е. величина электромагнитного вклада примерно равна размеру общего вклада. Следовательно ожидается, что

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0} \left[\frac{1 + \beta Q_\beta / \alpha Q_\alpha}{1 + \beta Q_\beta / \alpha_0 Q_\alpha} \right] \approx \frac{\alpha}{\alpha_0} . \quad (37)$$

Таким образом, если наблюдаемые фундаментальные константы зависят от объема дополнительного пространства, любое изменение в этом пространстве приведет к изменению фундаментальных констант, что повлияет на исход первичного нуклеосинтеза.

5.3 Случай однородной изотропной Вселенной

Компактифицированная космология Калуцы-Клейна характеризуется обилием конкурирующих выражений для тензора энергии-импульса \hat{T}_{AB} в высших измерениях, что отражает тот факт, что нет единого мнения о том, как определять «многомерную материю» в 5D. Напротив, в некомпактифицированной космологии есть только экономичное предположение о том, что Вселенная в более высоких измерениях пуста, т.е. $\hat{T}_{AB} = 0$. Таким образом, мы рассмотрим здесь только некомпактифицированную космологию, в частности, однородный и изотропный нестатический случай.

Общий пространственно изотропный и однородный линейный элемент в пятимерном случае:

$$d\hat{s}^2 = e^\nu dt^2 - e^\omega (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \epsilon e^\mu d\psi^2 , \quad (38)$$

где $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, ϵ - фактор, имеющий ту же функцию, что в уравнении (25), t , r , θ , ϕ имеют тот же смысл, что и в четырехмерном случае, и ψ является пятой координатой. Если мы рассмотрим зависимость от ψ и предположим, что ν , ω и μ являются разделимыми функциями переменных t , r и ψ , то мы сможем найти решения уравнений Эйнштейна $\hat{R}_{AB} = 0$.

Если рассмотреть случай зависимости только от t , тогда метрика (37) является пятимерным обобщением плоской однородной и изотропной космологии Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW):

$$e^\nu \equiv T^2(t) X^2(\psi) , e^\omega \equiv U^2(t) Y^2(\psi) , e^\mu \equiv V^2(t) Z^2(\psi) . \quad (39)$$

Понсе де Леон [14] был первым, кто исследовал решения вакуумных уравнений Эйнштейна (2) в такой форме. Из его восьми решений одно представляет особый интерес, потому что оно сводится на гиперповерхностях

$\psi = \text{constant}$ к пространственно плоской четырехмерной метрике FRW. Это решение имеет $\epsilon = -1$ и:

$$\begin{aligned} T(t) &= \text{const} \quad , \quad X(\psi) \propto \psi \quad , \\ U(t) &\propto t^{1/\alpha} \quad , \quad Y(\psi) \propto \psi^{1/(1-\alpha)} \quad , \\ V(t) &\propto t \quad , \quad Z(\psi) = \text{const} \quad , \end{aligned} \quad (40)$$

и может быть записано в виде:

$$d\hat{s}^2 = \psi^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi^{\frac{2}{(1-\alpha)}} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) - \frac{\alpha^2 t^2}{(1-\alpha)^2} d\psi^2 \quad , \quad (41)$$

где $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ - обычные прямоугольные координаты, а α - свободный параметр теории. Поскольку это решение сводится на пространственно-временным сечениях ($d\psi = 0$) до знакомой метрики FRW:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad (42)$$

его можно назвать обобщением плоской космологической метрики FRW до пяти измерений.

Предполагая, что космологическая материя ведет себя как идеальная жидкость:

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\rho + p) u^{\alpha} u_{\beta} - p \delta_{\beta}^{\alpha} \quad , \quad (43)$$

где u^{α} - 4-скорость элементов жидкости, получаем из уравнения (33): $\rho = T_0^0 + T_1^1 - T_2^2$ и $p = -T_2^2$ следующие выражения для плотности и давления:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G \alpha^2 \psi^2 t^2} \quad , \quad p = \left(\frac{2\alpha}{3} - 1 \right) \rho \quad . \quad (44)$$

Это позволяет описывать широкий спектр уравнений состояния: для $\alpha = 2$ - вселенная с преобладанием излучения; пылевидная стадия - если $\alpha = 3/2$, инфляционная при $0 < \alpha < 1$.

5.4 Криволинейная космология

Можно также рассмотреть криволинейный вариант однородного и изотропного линейного элемента (41):

$$d\hat{s}^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\omega} \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) - e^{\mu} d\psi^2 \quad . \quad (45)$$

Интересное решение [15] задачи $R_{AB} = 0$ получается, если предположить, что метрические коэффициенты имеют вид:

$$e_{\nu} \equiv L^2(t - \lambda\psi), \quad e^{\omega} \equiv M^2(t - \lambda\psi), \quad e^{\mu} \equiv N^2(t - \lambda\psi), \quad (46)$$

где L , M и N - волнообразные функции аргумента $(t - \lambda\psi)$. Предполагая $M = L^{(3\gamma+1)}$ с константой γ , то для идеальной жидкости получаем:

$$\rho = \frac{3\zeta^2 \lambda^2}{8\pi L^{3+3\gamma}} \quad , \quad p = \gamma \rho \quad . \quad (47)$$

С помощью этого решения можно описать либо эпоху доминирования материи ($\gamma = 0$) или радиационно-доминантную эпоху ($\gamma = 1/3$). В частности, поскольку масштабный коэффициент зависит не только от t , но и от ψ наблюдатели на гиперповерхностях с разными значениями ψ не согласятся с тем, сколько времени прошло с момента Большого взрыва, то есть от возраста Вселенной.

6. Астрофизические следствия

6.1 Солитоны Калуцы-Клейна

Чтобы смоделировать астрофизические явления, такие как Солнце или другие звезды в теории Калуцы-Клейна, необходимо распространить сферически-симметричное решение общей теории относительности Шварцшильда на более высокие измерения. Теорема Биркгофа гарантирует, что четырехмерная метрика Шварцшильда статична и уникальна с точностью до единственного свободного параметра (массы центрального объекта). Эта теорема, однако, не верна в более высоких измерениях, где решения, которые являются сферически-симметричными (в трех или более пространственных измерениях), обычно зависят от ряда параметров (таких как электрический и скалярный заряд) помимо массы, и могут в некоторых случаях также зависеть от времени. В отличие от четырехмерных стационарных решений, некоторые из них также могут быть невырожденными [16]. Такие локализованные решения с конечной энергией можно называть «солитонами» в том же смысле, который используется в других областях физики.

Физические свойства пятимерных солитонов с нулевым электрическим зарядом были впервые подробно описаны Соркиным [17], и Гроссом и Перри [18], решения которых характеризуются двумя параметрами. Хотя эти последние авторы (наряду со многими другими) описывают свои решения как «черные дыры», важно отметить, что в некоторых случаях рассматриваемые объекты являются голыми сингулярностями или имеют сингулярные горизонты событий. Термин «монополь» также потенциально вводит в заблуждение, поскольку более сложные солитоны могут, например, принимать форму диполей [226]. По этим причинам мы предпочитаем в данном отчете использовать более широкий термин «солитоны».

6.2 Кандидаты в темную материю

Рассматриваемый в четырех измерениях с помощью механизма индуцированной материи солитон напоминает дыру в геометрии, окруженную сферически-симметричным шаром ультрарелятивистской материи, плотность которой на больших расстояниях спадает как $1/r^4$. Если Вселенная действительно имеет более четырех измерений, эти объекты должны быть довольно обычными, будучи общими для гравитации Калуцы-Клейна точно так же, как черные дыры для общей теории относительности. Поэтому естественно возникает вопрос, могут ли они составлять еще необнаруженную темную материю, которая, по многим оценкам, составляет более 90% материи во Вселенной. Другие кандидаты в темную материю, такие как массивные нейтрино или аксионы, первичные черные дыры и вакуум с конечной энергией, сталкиваются с проблемами, связанными с чрезмерным вкладом во внегалактический фоновый свет (EBL) и космическое микроволновое фоновое излучение (СМВ), среди прочего [28]. В связи с этим рассматривается возможность того, что так называемая «недостающая масса» состоит из солитонов.

Оценка вклада солитонов в фоновое излучение представлена в работе [28]. При оценке предполагалось, что солитон представляет собой идеальную жидкость, которая состоит из фотонов (хотя априори нет причин исключать, например, ультрарелятивистские нейтрино или гравитоны), и среднее расстояние между солитонами массы M_s с точки зрения их средней плотности $\bar{\rho}_s$: $r = (M_s/\bar{\rho}_s)^{1/3}$, следовательно можно использовать это расстояние как расстояние до ближайшего солитона. Записывая среднюю плотность энергии солитонов в виде $\Omega_s \equiv \frac{\bar{\rho}_s}{\rho_{crit}}$ (где $\rho_{crit} = 1.88 \times 10^{-26} h^2 kg m^{-3}$, h – обычный параметр Хаббла в единицах $100 km s^{-1} Mpc^{-1}$), можно получить эффективную локальную плотность солитонного излучения, выраженную как доля плот-

ности реликтового излучения:

$$\frac{\rho_s}{\rho_{CMB}} \sim 5.0 \times 10^{-13} h^{8/3} k^{-1} \Omega_s^{4/3} \left(\frac{M_s}{M_\odot} \right)^{2/3}, \quad (48)$$

где M_\odot – масса Солнца, $\rho_{CMB} = 2.5 \times 10^{-5} h^{-2} \rho_{crit}$ – плотность энергии реликтового излучения при нулевом красном смещении. Величина k является свободным параметром, связанным с параметром ϵ . Удобным является выбор $k = 1$ (что означает $\epsilon = 1$). Этот класс решений был независимо открыт Чаттерджи [29] и обладает тем свойством, что гравитационная масса $M_g(r)$ на больших расстояниях $r \gg 1/a$ равна массе Шварцшильда M_* . Если предположить, что отдельные солитоны имеют галактическую массу ($M_s = 5 \times 10^{11} M_\odot$) и что они составляют всю темную материю, необходимую для того, чтобы Вселенная была закрытой ($\Omega_s = 0.9$), тогда из уравнения (48) получаем, что флуктуации реликтового излучения будут порядка:

$$\frac{\rho_s}{\rho_{CMB}} \sim 1.0 \times 10^{-5}, \quad (49)$$

где в качестве параметра Хаббла мы использовали $h = 0.7$. Это значение совпадает с верхним пределом, установленным COBE и другими экспериментами по аномальным вкладам в СМВ. Таким образом, можно сделать вывод о том, что солитоны, если они обеспечивают значительную часть скрытой массы, вероятно, менее массивны, чем галактики.

Однако следует иметь в виду, что нет причин, по которым параметры k и ϵ равны единице для всех солитонов. Они не являются универсальными константами, такими как c или G и могут варьироваться от солитона к солитону.

7. Заключение

... Таким образом, Калуца объединил теорию гравитации Эйнштейна и теорию электромагнетизма Максвелла с помощью добавления одного дополнительного измерения, позволившего тензорным индексам иметь пять значений вместо четырех. Можно включить другие взаимодействия, позволив индексам принимать еще большие значения, но целью данной работы было рассмотреть первую из предложенных теорий, рассматриваемой как расширение общей теории относительности. Вклад Кляйна состоял в том, чтобы объяснить явно ненаблюдаемую природу дополнительного измерения, предположив, что оно свернуто до небольшого размера.

Существует три версии теории Калуцы-Клейна, которые по-разному интерпретируют 5-е измерение, но имеют аналогичные наблюдательные последствия: компактифицированная, проективная и некомпактифицированная. В частности, мы увидели, что некомпактифицированный подход позволяет описать широкое разнообразие уравнений состояния. Среди некоторых задачи теории можно выделить следующие: (1) поиск новых точных решений; (2) дальнейшие работы по квантованию; (3) исследование физического смысла пятого измерения. К настоящему времени не было найдено никакой последовательной теории, но все больше физиков полагают, что постулирование дополнительных пространственных измерений является правильным способом для получения теории Великого Объединения.

Список литературы

- [1] Nordstrom G. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips // Ann. Phys. Lpz. 1913. Vol. 42. P. 533–554.
- [2] Калуца Т. К проблеме единства физики. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Москва, Мир, 1979. С. 529.
- [3] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitätstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.
- [4] G. Lessner, Unified field theory on the basis of the projective theory of relativity, Phys. Rev. D25 (1982) 3202; ibid D27 (1982) 1401.
- [5] P. Jordan, Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie, Ann. Phys. (Leipzig) 1 (1947) 219.
- [6] Y. Thiry, Les equations de la theorie unitaire de Kaluza, Comptes Rendus Acad. 226 (1948) 216.
- [7] C. Brans and R. H. Dicke, Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, Phys. Rev. 124 (1961) 925.
- [8] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Experimental constraints on extra dimensions, Phys. Lett. 270B (1991) 21.
- [9] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, Kaluza-Klein supergravity, Phys. Rep. 130 (1986) 1.
- [10] P. D. B. Collins, A. D. Martin and E. J. Squires, Particle physics and cosmology (Wiley, New York, 1989).
- [11] D. Bailin, A. Love, Rep. Prog. Phys. 50, 1087 (1987)
- [12] P. S. Wesson and J. Ponce de Leon, Kaluza-Klein equations, Einstein's equations, and an effective energy-momentum tensor, J. Math. Phys. 33 (1992) 3883.
- [13] Mach's principle: from Newton's bucket to quantum gravity, eds. J. Barbour and H. Pfister (Birkhauser, Boston, 1995).
- [14] J. Ponce de Leon, Cosmological models in a Kaluza-Klein theory with variable rest mass, Gen. Rel. Grav. 20 (1988) 539.
- [15] H. Liu and P. S. Wesson, Cosmological solutions and their effective properties of matter in Kaluza-Klein theory, Int. J. Mod. Phys. D3 (1994) 627.
- [16] T. Matos, Solitons in five-dimensional gravity, Gen. Rel. Grav. 19 (1987) 481.
- [17] R. D. Sorkin, Kaluza-Klein monopole, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 87.
- [18] D. J. Gross and M. J. Perry, Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories, Nucl. Phys. B226 (1983) 29.
- [19] J. M. Overduin and P. S. Wesson, Constraints on dark matter from intergalactic radiation, Vistas Astron. 35 (1992) 439.
- [20] Chodos A., Detweiler S.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2167.
- [21] Freund P.G.O.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 209, p. 146.
- [22] E. Alvarez and M. B. Gavela, Entropy from extra dimensions, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 931.
- [23] Q. Shafi and C. Wetterich, Cosmology from higher-dimensional gravity, Phys. Lett. 129B (1983) 387.

- [24] Edward W. Kolb, Malcolm J. Perry, T. P. Walker. Time variation of fundamental constants, primordial nucleosynthesis, and the size of extra dimensions. — Phys. Rev. Ser. T, 1986, v.33, p. 33
- [25] A.D Linde, M.I Zelnikov. Inflationary Universe With Fluctuating Dimension. Phys. Lett. B, 215 (1988)
- [26] Linde A.D., 1990b, Particle Physics and Inflationary Cosmology, Harwood Academic, Switzerland
- [27] Linde A.D., 1987, Physica Scripta T15, 169
- [28]
- [29] S. Chatterjee, Static spherically symmetric solution in a Kaluza-Klein type of metric, Astron. Astrophys. 230 (1990) 1.