НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ "МИФИ"

Кафедра физики элементарных частиц и космологии

Модель Калуцы-Клейна

Студент:	Семичева Маргарита
Преподаватель:	Хлопов Максим Юрьевич
Группа:	М19-115

Москва

2020

Содержание

1. Введение

Предположение о том, что пространство может иметь больше трех пространственных измерений возникло еще в XX веке и до сих пор присутствует во множестве теорий. Идея объединить электромагнетизм и гравитацию, использовав дополнительное пятое измерение, возникла независимо у Нордстрема [1] и Калуцы [2]. Нордстрем рассматривал скалярную теорию гравитации как составную часть электродинамики Максвелла еще до создания общей теории относительности. Калуца, в свою очередь, воспользовался уже имеющейся теорией гравитации Энштейна и показал, что пятимерная гравитация в вакууме содержит в себе четырехмерную гравитацию в присутствии электромагнитного поля и уравнения Максвелла.

Основной проблемой всех многомерных теорий является ненаблюдаемость дополнительных измерений в низкоэнергетическом приближении. Пытаясь разрешить данную проблему, Калуца наложил несколько искусственное ограничение ("условие цилиндра") на координаты, таким образом, запретив пятому измерению прямо фигурировать в законах физики. Вклад Кляйна [3] состоял в том, чтобы сделать это ограничение менее искусственным, предложив правдоподобную физическую основу для компактификации пятого измерения. Модель Калуцы-Клейна предполагает, что дополнительные измерения компакнты и имеют крайне малый размер порядка длины Планка $l_{Pl} = 1/M_{Pl}$. Не смотря на то, что практическое обнаружение дополнительных скрытых размерностей выходило за рамки экспериментальных возможностей, данная модель была с энтузиазмом воспринята идеологами единой теории поля, и когда пришло время включить в теорию сильные и слабые взаимодействия путем расширения механизма Калуцы на более высокие измерения, предполагалось, что они тоже будут компактными.

Обсуждаемые многомерные модели обладают тремя ключевыми характеристиками:

- Материя в данных теориях - есть проявление геометрии: электромагнитное поле и поля Янга-Миллса, как и гравитационное поле, полностью содержатся в многомерном тензоре Эйнштейна ${}^{(4+d)}G_{AB}$, то есть в метрике и ее производных. Тензор энергии-импульса ${}^{(4+d)}T_{AB}$ не требуется.
- Многомерная теория является минимальным расширением общей теории относительности, т. е. в ней нет модификации математической структуры теории. Единственное изменение заключается в том, что тензорные индексы работают от 0 до $(3 + d)$ вместо 0 до 3;
- Теории априори цилиндрические. Не предлагается никакого механизма, объясняющего, почему физика зависит от первых четырех координат, но не от дополнительных.

Основные следствия вышеперечисленных характеристик обсуждаются в пункте 2 данной работы. Также рассматриваются два частных случая теории: случай $\phi = const$ и случай $A_\alpha = 0$.

Существует три подхода к изучению многомерных теорий, каждый из которых приносит в жертву одну из ключевых особенностей: компактифицированные, проективные и некомпактифицированные теории. Компактифицированные и некомпактифицированные теории рассматриваются соответственно в пунктах 3 и 4. Пункт 5 содержит основные космологические следствия теории.

В данной работе заглавные латинские буквы $A, B, \ldots$ будут соответствовать индексам, пробегающим значения $0 \div 4$, а греческие $\alpha, \beta, \ldots$ - индексам со значениями $0 \div 3$. Пятимерные величины обозначаются символом $\hat{}$, а новая пятая координата обозначается $y = x^4$. Четырехмерная метрическая сигнатура принята равной $(+, -, -, -)$. Вычисления приведены в естественной системе единиц с $c = \hbar = G = 1$.

2. Механизм Калуцы-Клейна

Уравнения Эйнштейна в пяти измерениях без пятимерного тензора энергии и импульса имеют вид:

$$\hat{G}_{AB} = 0\,, \tag{1}$$

что эквивалентно

$$\hat{R}_{AB} = 0\,, \tag{2}$$

где $\hat{G}_{AB} \equiv \hat{R}_{AB} - \hat{R}\,\hat{g}_{AB}/2$ - тензор Энштейна, $\hat{R}_{AB}$ и $\hat{R} = \hat{g}_{AB}\hat{R}^{AB}$ - пятимерные тензор Риччи и скаляр Ричи соответственно, $\hat{g}_{AB}$ - пятимерный метрический тензор. Здесь A и B пробегают значения $0 \div 4$. Эти уравнения можно получить из вариации пятимерного действия Эйнштейна:

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}}\int \hat{R}\sqrt{-\hat{g}}\; d^4x\, dy\,, \tag{3}$$

где $y = x^4$ представляет пятую координату, $\hat{G}$ - пятимерная гравитационная постоянная.

Отсутствие источников материи в этих уравнениях отражает первое предположение Калуцы относительно характеристик многомерных теорий, а именно то, что материя является проявлением геометрии.

Пятимерные тензор Риччи и символы Кристоффеля имеют определение аналогичное четырехмерным:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{AB} &= \partial_C\hat{\Gamma}^C_{AB} - \partial_B\hat{\Gamma}^C_{AC} + \hat{\Gamma}^C_{AB}\hat{\Gamma}^D_{CD} - \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC}\,, \\ \hat{\Gamma}^C_{AB} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{CD}\left(\partial_A\hat{g}^{DB} + \partial_B\hat{g}^{DA} + \partial_D\hat{g}^{AB}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Данные уравнения отражают вторую ключевую особенность подхода Калуцы к объединению: за исключением того факта, что тензорные индексы имеют значения от 0 до 4 вместо $0\div 3$, вид уравнений аналогичен виду уравнений в теории Эйнштейна.

Для метрики $\alpha\beta$-компоненты из $\hat{g}_{AB}$ отождествляется с четырехмерным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, $\alpha 4$-компоненты с электромагнитным потенциалом A_α и 44-компонента со скалярным полем ϕ. Таким образом, удобным способом параметризации метрики является:

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2\phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa\phi^2 A_\alpha \\ \kappa\phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

где электромагнитный потенциал A_α масштабирован на константу κ, чтобы в дальнейшем получить правильные множители в действии.

Если далее применить третью ключевую особенность теории Калуцы ("условие цилиндра"), т. е. положить все производные по пятой координате равными нулю, то с помощью метрики (5) и определений (4) обнаружится, что $\alpha\beta$-, $\alpha 4$- и 44-компоненты пятимерного уравнения поля (2) сводятся соответственно к следующим уравнениям поля [4] в четырех измерениях:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{\kappa^2\phi^2}{2}T^{EM}_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi}\left[\nabla_\alpha(\partial_\beta\phi) - g_{\alpha\beta}\Box\phi\right]\,, \\ \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= -3\frac{\partial^\alpha\phi}{\phi}F_{\alpha\beta}, \quad \Box\phi = \frac{\kappa^2\phi^3}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - R\,g_{\alpha\beta}/2$ - тензор Энштейна, $T^{EM}_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}/4 - F^\gamma_\alpha F_{\beta\gamma}$ - электромагнитный тензор энергии-импульса и $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Как и предполагалось, всего $10 + 4 + 1 = 15$ уравнений, поскольку в пятимерной метрике (5) пятнадцать независимых элементов.

Случай $\phi = const$

В случае, когда скалярное поле ϕ постоянно в пространстве-времени, первые два уравнения (6) являются уравнениями Эйнштейна и Максвелла соответственно:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G\phi^2 T^{EM}_{\alpha\beta}, \quad \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0 \; , \tag{7}$$

где масштабный параметр κ в терминах гравитационной постоянной G (в четырех измерениях) определяется как:

$$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G} \; . \tag{8}$$

Этот результат был первоначально получен Калуцей и Клейном, которые установили $\phi = 1$. Однако условие $\phi = const$ согласуется только с третьим из полевых уравнений (6), когда $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$, как впервые было указано Джорданом [5] и Тири [6].

Случай $A_\alpha = 0$

3. Компактифицированные теории

4. Некомпактифицированные теории

5. Космологические следствия

6. Заключение

Список литературы

[1] Nordstrom G. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitatsprinzips //Ann. Phys. Lpz. 1913. Vol. 42. P. 533–554.

[2] Калуца Т. К проблеме единства физики. Альберт Энштейн и теория гравитации. Москва, Мир, 1979. С. 529.

[3] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.

[4] G. Lessner, Unified field theory on the basis of the projective theory of relativity, Phys. Rev. D25 (1982) 3202; ibid D27 (1982) 1401.

[5] P. Jordan, Erweiterung der projektiven Relativitatstheorie, Ann. Phys. (Leipzig) 1 (1947) 219.

[6] Y. Thiry, Les equations de la theorie unitaire de Kaluza, Comptes Rendus Acad. 226 (1948) 216.