

Кафедра физики элементарных частиц и космологии

Модель Калуцы-Клейна

Студент:

Семичева Маргарита

Преподаватель:

Хлопов Максим Юрьевич

Группа:

M19-115

Содержание

| | | |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | Механизм Калуцы-Клейна | 3 |
| 3 | Компактифицированные теории | 5 |
| 4 | Некомпактифицированные теории | 6 |
| 5 | Космологические следствия | 7 |
| 6 | Заключение | 8 |

1. Введение

Предположение о том, что пространство может иметь больше трех пространственных измерений возникло еще в XX веке и до сих пор присутствует во множестве теорий. Идея объединить электромагнетизм и гравитацию, используя дополнительное пятое измерение, возникла независимо у Нордстрема [1] и Калуцы [2]. Нордстрем рассматривал скалярную теорию гравитации как составную часть электродинамики Максвелла еще до создания общей теории относительности. Калуца, в свою очередь, воспользовался уже имеющейся теорией гравитации Эйнштейна и показал, что пятимерная гравитация в вакууме содержит в себе четырехмерную гравитацию в присутствии электромагнитного поля и уравнения Максвелла.

Основной проблемой всех многомерных теорий является ненаблюдаемость дополнительных измерений в низкоэнергетическом приближении. Пытаясь разрешить данную проблему, Калуца наложил несколько искусственное ограничение ("условие цилиндра") на координаты, таким образом, запретив пятому измерению прямо фигурировать в законах физики. Вклад Кляйна [3] состоял в том, чтобы сделать это ограничение менее искусственным, предложив правдоподобную физическую основу для компактификации пятого измерения. Модель Калуцы-Клейна предполагает, что дополнительные измерения компактны и имеют крайне малый размер порядка длины Планка $l_{Pl} = 1/M_{Pl}$. Не смотря на то, что практическое обнаружение дополнительных скрытых размерностей выходило за рамки экспериментальных возможностей, данная модель была с энтузиазмом воспринята идеологами единой теории поля, и когда пришло время включить в теорию сильные и слабые взаимодействия путем расширения механизма Калуцы на более высокие измерения, предполагалось, что они тоже будут компактными.

Обсуждаемые многомерные модели обладают тремя ключевыми характеристиками:

- Материя в данных теориях - есть проявление геометрии: электромагнитное поле и поля Янга-Миллса, как и гравитационное поле, полностью содержатся в многомерном тензоре Эйнштейна ${}^{(4+d)}G_{AB}$, то есть в метрике и ее производных. Тензор энергии-импульса ${}^{(4+d)}T_{AB}$ не требуется;
- Многомерная теория является минимальным расширением общей теории относительности, т. е. в ней нет модификации математической структуры теории. Единственное изменение заключается в том, что тензорные индексы работают от 0 до $(3 + d)$ вместо 0 до 3;
- Теории априори цилиндрические. Не предлагается никакого механизма, объясняющего, почему физика зависит от первых четырех координат, но не от дополнительных.

Основные следствия вышеперечисленных характеристик обсуждаются в пункте 2 данной работы. Также рассматриваются два частных случая теории: случай $\phi = const$ и случай $A_\alpha = 0$.

Существует три подхода к изучению многомерных теорий, каждый из которых приносит в жертву одну из ключевых особенностей: компактифицированные, проективные и некомпактифицированные теории. Компактифицированные и некомпактифицированные теории рассматриваются соответственно в пунктах 3 и 4. Пункт 5 содержит основные космологические следствия теории.

В данной работе заглавные латинские буквы A, B, \dots будут соответствовать индексам, пробегающим значения $0 \div 4$, а греческие α, β, \dots - индексам со значениями $0 \div 3$. Пятимерные величины обозначаются символом $\hat{}$, а новая пятая координата обозначается $y = x^4$. Четырехмерная метрическая сигнатура принята равной $(+, -, -, -)$. Вычисления приведены в естественной системе единиц с $c = \hbar = G = 1$.

2. Механизм Калуцы-Клейна

Уравнения Эйнштейна в пяти измерениях без пятимерного тензора энергии и импульса имеют вид:

$$\hat{G}_{AB} = 0, \quad (1)$$

что эквивалентно

$$\hat{R}_{AB} = 0, \quad (2)$$

где $\hat{G}_{AB} \equiv \hat{R}_{AB} - \hat{R}\hat{g}_{AB}/2$ - тензор Эйнштейна, \hat{R}_{AB} и $\hat{R} = \hat{g}_{AB}\hat{R}^{AB}$ - пятимерные тензор Риччи и скаляр Риччи соответственно, \hat{g}_{AB} - пятимерный метрический тензор. Здесь A и B пробегает значения $0 \div 4$. Эти уравнения можно получить из вариации пятимерного действия Эйнштейна:

$$S = -\frac{1}{16\pi\hat{G}} \int \hat{R}\sqrt{-\hat{g}} d^4x dy, \quad (3)$$

где $y = x^4$ представляет пятую координату, \hat{G} - пятимерная гравитационная постоянная.

Отсутствие источников материи в этих уравнениях отражает первое предположение Калуцы относительно характеристик многомерных теорий, а именно то, что материя является проявлением геометрии.

Пятимерные тензор Риччи и символы Кристоффеля имеют определение аналогичное четырехмерным:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{AB} &= \partial_C \hat{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \hat{\Gamma}_{AC}^C + \hat{\Gamma}_{AB}^C \hat{\Gamma}_{CD}^D - \hat{\Gamma}_{AD}^C \hat{\Gamma}_{BC}^D, \\ \hat{\Gamma}_{AB}^C &= \frac{1}{2} \hat{g}^{CD} (\partial_A \hat{g}^{DB} + \partial_B \hat{g}^{DA} + \partial_D \hat{g}^{AB}). \end{aligned} \quad (4)$$

Данные уравнения отражают вторую ключевую особенность подхода Калуцы к объединению: за исключением того факта, что тензорные индексы имеют значения от 0 до 4 вместо $0 \div 3$, вид уравнений аналогичен виду уравнений в теории Эйнштейна.

Для метрики $\alpha\beta$ -компоненты из \hat{g}_{AB} отождествляется с четырехмерным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, $\alpha 4$ -компоненты с электромагнитным потенциалом A_α и 44-компонента со скалярным полем ϕ . Таким образом, удобным способом параметризации метрики является:

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa \phi^2 A_\alpha \\ \kappa \phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где электромагнитный потенциал A_α масштабирован на константу κ , чтобы в дальнейшем получить правильные множители в действии.

Если далее применить третью ключевую особенность теории Калуцы ("условие цилиндра"), т. е. положить все производные по пятой координате равными нулю, то с помощью метрики (5) и определений (4) обнаружится, что $\alpha\beta$ -, $\alpha 4$ - и 44-компоненты пятимерного уравнения поля (2) сводятся соответственно к следующим уравнениям поля [4] в четырех измерениях:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\alpha\beta}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\alpha (\partial_\beta \phi) - g_{\alpha\beta} \square \phi], \\ \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= -3 \frac{\partial^\alpha \phi}{\phi} F_{\alpha\beta}, \quad \square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - R g_{\alpha\beta}/2$ - тензор Эйнштейна, $T_{\alpha\beta}^{EM} \equiv g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}/4 - F_\alpha^\gamma F_{\beta\gamma}$ - электромагнитный тензор энергии-импульса и $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Как и предполагалось, всего $10 + 4 + 1 = 15$ уравнений, поскольку в пятимерной метрике (5) пятнадцать независимых элементов.

Случай $\phi = const$

В случае, когда скалярное поле ϕ постоянно в пространстве-времени, первые два уравнения (6) являются уравнениями Эйнштейна и Максвелла соответственно:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G\phi^2 T_{\alpha\beta}^{EM}, \quad \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \quad (7)$$

где масштабный параметр κ в терминах гравитационной постоянной G (в четырех измерениях) определяется как:

$$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}. \quad (8)$$

Этот результат был первоначально получен Калупей и Клейном, которые установили $\phi = 1$. Однако условие $\phi = const$ согласуется только с третьим из полевых уравнений (6), когда $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$, как впервые было указано Джорданом [5] и Тири [6].

Случай $A_\alpha = 0$

3. Компактифицированные теории

4. Некомпактифицированные теории

5. Космологические следствия

6. Заключение

Список литературы

- [1] Nordstrom G. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips // Ann. Phys. Lpz. 1913. Vol. 42. P. 533–554.
- [2] Калуца Т. К проблеме единства физики. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Москва, Мир, 1979. С. 529.
- [3] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitätstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.
- [4] G. Lessner, Unified field theory on the basis of the projective theory of relativity, Phys. Rev. D25 (1982) 3202; ibid D27 (1982) 1401.
- [5] P. Jordan, Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie, Ann. Phys. (Leipzig) 1 (1947) 219.
- [6] Y. Thiry, Les equations de la theorie unitaire de Kaluza, Comptes Rendus Acad. 226 (1948) 216.