Монополи в космо-микрофизике

Камалетдинов Айрат

December 2018

С созданием физики как науки, основанной на опыте, утвердилось мнение, что электрические и магнитные свойства тел существенно различаются. Это мнение было чётко выражено Уильямом Гильбертом в 1600 году. Установленное Шарлем Кулоном тождество законов притяжения и отталкивания для электрических зарядов и магнитных зарядов — полюсов магнитов, вновь подняло вопрос о сходстве электрических и магнитных сил, однако к концу XVIII века было выяснено, что в лабораторных условиях невозможно создать тело с ненулевым полным магнитным зарядом. Понятие о «магнитно заряженной субстанции» было надолго изгнано из физики после работы Ампера в 1820, в которой было доказано, что контур с электрическим током создаёт такое же магнитное поле, как магнитный диполь. Однако к 1930 годам представления об источниках магнитных полей стали меняться. Сформулированные Максвеллом уравнения классической электродинамики связывают электрическое и магнитное поля с движением заряженных частиц. Эти уравнения почти симметричны относительно электричества и магнетизма. Так уравнения электростатики и магнитостатики имеют вид:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho; \qquad rot\vec{E} = 0; \qquad div\vec{H} = 0; \qquad rot\vec{H} = 4\pi\vec{j} \tag{1}$$

Простейший случай появления монополя в теории получается симметризацией этих уравнений. Как показал Дирак [1], это приводит к тому, что в присутствии магнитного заряда, электрический заряд должен квантоваться.

По аналогии с формулой $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ определим магнитный заряд, переносимый магнитным монополем по формуле $\vec{H} = \frac{\mu}{r^3}\vec{r}$. Где μ - и есть магнитный заряд.

А так же зададим векторный потенциал, через который выражается магнитное поле: $\vec{H} = rot\vec{A}$

В описываемой модели векторный потенциал не может быть задан в виде непрерывной функции всюду вне магнитного заряда. Чтобы показать это, запишем поток магнитного поля через поверхности

Σ_1 и Σ_2, натянутые на контур γ:

$$F_1 = \int_{\Sigma_1} \vec{H} d\vec{S} = \oint\limits_{\gamma} \vec{A} d\vec{r} \qquad F_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{H} d\vec{S} = -\oint\limits_{\gamma} \vec{A} d\vec{r} = -F_1 \tag{2}$$

Тогда суммарный поток через поверхность $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ оказывается равным: $F = F_1 + F_2 = 0$ если $\vec{A}(\vec{r})$ - непрерывная функция $\vec{A} : \Sigma \to TM$.
Однако в присутствии источника $F = 4\pi\mu \neq 0$. То есть $\vec{A}$ не является непрерывной функцией на поверхности Σ.

Чтобы показать, как наличие магнитного заряда приводит к квантованию электрического - воспользуемся формулировкой квантовой механики в интегралах по траекториям, в рамках которой амплитуда перехода частицы из точки 1 в точку 2 за время $t_2 - t_1$ выражается следующим образом:

$$< 2, t_2 | 1, t_1 >= \int exp(\frac{iS[\vec{r}]}{\hbar}) D[\vec{r}], \qquad S = S_0 + e\int_1^2 \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \tag{3}$$

Рассмотрим относительную фазу вкладов двух траекторий γ_1 и γ_2:

$$\frac{1}{\hbar}(S[\gamma_1] - S[\gamma_2]) = \frac{e}{\hbar} \oint\limits_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \tag{4}$$

Таким образом вклад в амплитуду данными траекториями равен либо $\frac{e}{\hbar}F_1$, либо $-\frac{e}{\hbar}F_2$. Но амплитуда не должна зависеть от данной неопределенности. Таким образом легко видеть что электрический заряд определяется степенью отображения $S^1 \to S^1$ (фундаментальной группой $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$) ввиду требования инвариантности амплитуды относительно изменения относительной фазы.

$$\frac{e}{\hbar}F_1 - (-\frac{e}{\hbar}F_2) = \frac{e}{\hbar}F = 2\pi n \tag{5}$$

Тогда:

$$e = \frac{n\hbar}{2\mu} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Это и есть правило квантования Дирака для электрического заряда в присутствии магнитного монополя.

В 1974 году t'Hooft и Поляков показали [2], что магнитный монополь может возникать в калибровочных моделях электрослабого взаимодействия. Однако существование решения типа магнитного монополя требует компактной группы единой симметрии, в которую включена электромагнитная симметрия, что не имеет места в рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий.

Магнитный заряд, в отличие от электрического имеет не Нётеровскую, а топологическую природу. Более детальное изучение этого явления приводит к понятию монополей Полякова-т'Хоофта, которые естественным образом возникают в присутствии калибровочных полей в топологически нетривиальных моделях теории поля со спонтанно-нарушенной симметрией. [3]
Рассмотрим систему, описываемую лагранжианом:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\bigtriangledown_\mu \vec{\phi})^2 - \lambda(\vec{\phi}^2 - a^2)^2 - \frac{1}{4}(\vec{F}_{\mu\nu})^2 \tag{7}$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\mu \tag{8}$$

$\vec{F}_{\mu\nu}$ - тензор калибровочного поля $\vec{A}_\mu$, являющегося присоединенным представлением калибровочной группы $SO(3)$, $\vec{\phi}$ - изовекторное хиггсово поле и $\bigtriangledown_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + g\vec{A}_\mu \times \vec{\phi}$. Наименьшее значение энергии такой системы достигается на полевых конфигурациях $\vec{\phi} = const$, $|\vec{\phi}| = a^2$. То есть на вакуумных сфероидах, на которых $SO(3)$ действует транзитивно, но неэффективно, то есть ядро отображения $SO(3) \rightarrow S^2$ нетривиально (легко показать что стабилизатором действия группы является $SO(2)$). Таким образом топологическое пространство вакуумов гомеоморфно фактор-пространству $S^2 = SO(3)/SO(2)$, гомеоморфному двумерной сфере S^2_a, являющейся сферой радиуса a в изотопическом пространстве. То есть отображение $\vec{\phi} : S^2_\infty \rightarrow S^2_a$ на асимптотике $\vec{r} \rightarrow \infty$ характеризуется второй гомотопической группой $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Таким образом полевым конфигурациям можно поставить в соответствие топологический заряд Q, определяя его как элемент $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Например вычисляя поток через вакуумную сферу S^2_∞:

$$F = \int_{S^2_\infty} \vec{H} d\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\int_{S^2_\infty} \epsilon_{ijk}\vec{\phi}\vec{F}_{jk} d\Sigma_i = -\frac{4\pi Q}{g} \tag{9}$$

Гомотопические классы при этом будут разделены между собой бесконечным потенциальным барьером. Сравнивая это с формулой Гаусса $F = 4\pi\mu$, приходим к выводу, что магнитный заряд имеет топологическую природу и определяется как степень отображения $\vec{\phi} : S^2_\infty \to S^2_a$ или $\mu = -\frac{Q}{g}$. Из абелевости высших гомотопических групп, приходим к выводу, что магнитный заряд аддитивен.

Рассмотренный подход обобщается на случай произвольных калибровочных симметрий и произвольных их нарушений. Для того чтобы выяснить - возникают ли в рассматриваемой теории магнитные монополи - достаточно рассмотреть $\pi_2(G/H)$, где G - полная группа калибровочной симметрии, H - группа ненарушенных симметрий. Критерием существования в такой модели монополей является нетривиальность $\pi_2(G/H)$.
Если группа G односвязна, то из рассмотрения точной последовательности расслоения $G \to G/H$ со слоем H

$$... \xrightarrow{p^*} \pi_{i+1}(G/H) \xrightarrow{\partial} \pi_i(H) \xrightarrow{i^*} \pi_i(G) \xrightarrow{p^*} \pi_i(G/H) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(H) \xrightarrow{i^*} ... \tag{10}$$

и из односвязности G:

$$0 \xrightarrow{p^*} \pi_2(G/H) \xrightarrow{\partial} \pi_1(H) \xrightarrow{i^*} 0 \tag{11}$$

следует, что $\pi_2(G/H) \approx \pi_1(H)$. Эта ситуация характерна для теорий великого объединения [3]. Например если электромагнитная и цветовая симметрии не нарушаются, то есть $H \approx SU(3) \times U(1)$ тогда $\pi_1(H) \approx \pi_1(U(1)) \approx \mathbb{Z}$, то есть эти теории предсказывают существование магнитных монополей. Нетрудно проверить, что в стандартной модели монополи отсутствуют ввиду тривиальности второй гомотопической группы базы расслоения для калибровочных групп физики стандартной модели.

Важно отметить, что до фазового перехода массивных магнитных монополей просто не существует, поскольку симметрия восстановлена. Они возникают во Вселенной после фазового перехода.

В моделях великого объединения симметрия электромагнитных взаимодействий была включена в компактную группу симметрии великого объединения (ВО), делая, таким образом, существование магнитных монополей с дираковским магнитным зарядом неизбежным топологическим следствием нарушения симметрии ВО. Масса монополей определяется их вакуумным средним. Предсказываемая масса таких монополей имела порядок величины $m \sim \frac{\Lambda}{e}$, где Λ - характерная величина нарушения симметрии ВО. Для $\Lambda \sim 10^{15} GeV$ масса монополя оказывается $m \sim 10^{16} GeV$, что объясняет отрицательные результаты поисков монополей на ускорителях.

В сингулярном поле магнитного монополя индуцируется распад протона ($p^+ \to e^+ e^- e^+$) с сечением, определяемым размером протона ($\sigma \sim 10^{-28} cm^2$). Этот процесс объясняется следующим образом:

Минимальное расширение стандартной модели должно включать в себя прямое произведение групп калибровочных взаимодействий в качестве подгруппы. Минимальной группой, включающей в себя $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, является группа $SU(5)$. На основе данной группы можно построить минимальную модель великого объединения.

Фундаментальные фермионы в данной модели войдут в лагранжиан ввиде квинтуплета, имеющего вид:

$$\begin{pmatrix} d_r & d_g & d_b & e^+ & \hat{\nu}_e \end{pmatrix} \tag{12}$$

А так же некоторого декуплета. $SU(5)$ включает в себя 24 генератора, 12 из которых характеризуют переносчики калибровочных взаимодействий стандартной модели, поскольку $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$. Оставшиеся 12 переносчиков уникальны для данной модели ВО, и именно они ответственны за протекание реакции

распада протона в поле магнитного монополя.
Все 24 переносчика могут быть описаны при помощи присоединенного представления группы $SU(5)$:

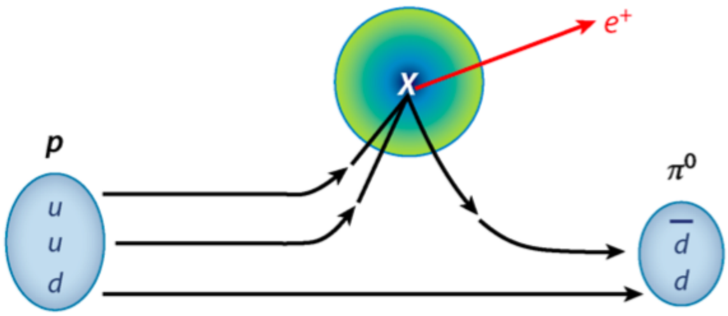
$$\begin{pmatrix} & & & X_1 & Y_1 \\ & G - 2B/\sqrt{30} & & X_2 & Y_2 \\ & & & X_3 & Y_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} \end{pmatrix} \tag{13}$$

где G - 3×3 матрица глюонов, B соответствует калибровочному бозону группы $U(1)$, $B + W^3$ дают состояние фотона и Z-бозона
Легко показать, что формы, построенные из квинтуплета и декуплета фермионов, а так же калибровочного присоединенного представления группы $SU(5)$, пораждают все возможные вершины стандартной модели. Однако в теории $SU(5)$ вершин оказывается больше, чем было в СМ.
Одной из новых вершин является вершина, описывающая взаимодействие X-бозона с кварками:

$$\begin{pmatrix} d_r & d_g & d_b & e^+ & \hat{\nu}_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ \hat{\nu}_e \end{pmatrix} = d_r \cdot X_1 \cdot e^+ \tag{14}$$

Приведенная вершина явно приводит к нарушению сохранения барионного числа. Аналогичные вершины для X_2 и X_3 будут отличаться от данной только цветом переносчика. Аналогично, Y бозон оказывается ответственным за превращения кварков в нейтрино. Еще одной новой вершиной в данной теории является $u \cdot X \cdot u$

Для объяснения малой интенсивности распада протона промежуточные бозоны X и Y предполагаются очень массивными (их массы более 10^{14} ГэВ). Поэтому невозможно их непосредственное наблюдение ни в каких мыслимых при современном развитии техники экспериментах.



Однако в сингулярном поле массивного монополя такой распад становится возможным благодаря достаточной массе магнитного монополя. Рисунок, иллюстрирующий данный процесс приведен вверху. Таким образом процесс

$$p^+ + M \to e^+ + M + \begin{array}{l} \pi^0 \\ \hookrightarrow \quad e^+e^- \end{array} \tag{15}$$

Описывает возможность распада протона по каналу $(p^+ \to e^+e^-e^+)$ в присутствии магнитного монополя.

Согласно старой модели горячей Вселенной частицы с массой га любого сорта должны были находиться в равновесии при температуре $T > m$ если взаимодействие этих частиц достаточно сильное, чтобы выполнялись условия их равновесия с плазмой и излучением. Это значит, что скорость реакций σv достаточно велика, чтобы было справедливо условие $n(T)(\sigma v) > \Gamma$. где $n(T)$ — плотность числа частиц при температуре T и $\Gamma \sim \frac{T^2}{m_{pl}}$ темп космологического расширения. Когда температура падает до $T < m$ При температуре $_f$ когда темп взаимодействия частиц сравнивается с темпом космологического расширения - частицы выходят из равновесия. В результате происходит закалка частиц, и их относительная концентрация больше не меняется, поскольку с уменьшением температуры темп расширения должен был превысить темп аннигиляции пар монополь-антимонополь, что должно было привести к закалке концентрации реликтовых магнитных монополей.

Сечение аннигиляции определяется кулоновским притяжением магнитных зарядов.

Темп аннигиляции монополя и антимонополя может быть найден в диффузионном приближении при рассмотрении диффузии частиц с магнитным зарядом $-\mu$ к поглощающей сфере с радиусом $a < \Gamma_0$ и с магнитным зарядом $+\mu$. [4]

Тогда для массы магнитного монополя $m \sim 10^{16} GeV$ - плотность магнитных монополей оказывается на 16 порядков величины больше, чем барионная плотность. Для того чтобы решить проблему перепроизводства монополей была предложена инфляционная космологическая модель, в которой начальная концентрация монополей сильно подавлена

Рассматриваемый механизм топологического образования монополей в процессе фазового перехода происходит так, что сначала в пространстве формируется поле монополя и только затем локализуется сингулярность этого поля. Ясно, что локальное поле, рождаемое в фазовом переходе, не имеет ориентации. Таким образом, совместно с монополями и антимонополями могут формироваться петли магнитного поля, образуя структуру первичных магнитных полей во Вселенной (Хлопов, 1988). Самосогласованная эволюция этих первичных полей совместно с плазмой монополей и антимонополей еще не изучена.

Список использованных источников

[1] Paul Dirac, "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field". Proc. Roy. Soc. (London) A 133, 60 (1931).

[2] G. 't HOOFT, Nuclear Physics B79 (1974) 276-284. North-Holland Publishing Company

[3] A.S. Schwarz and Yu.S. Tyupkin, Nucl. Phys. 209, 427 (1982).

[4] М.Ю. Хлопов. Основы Космомикрофизики (2011)