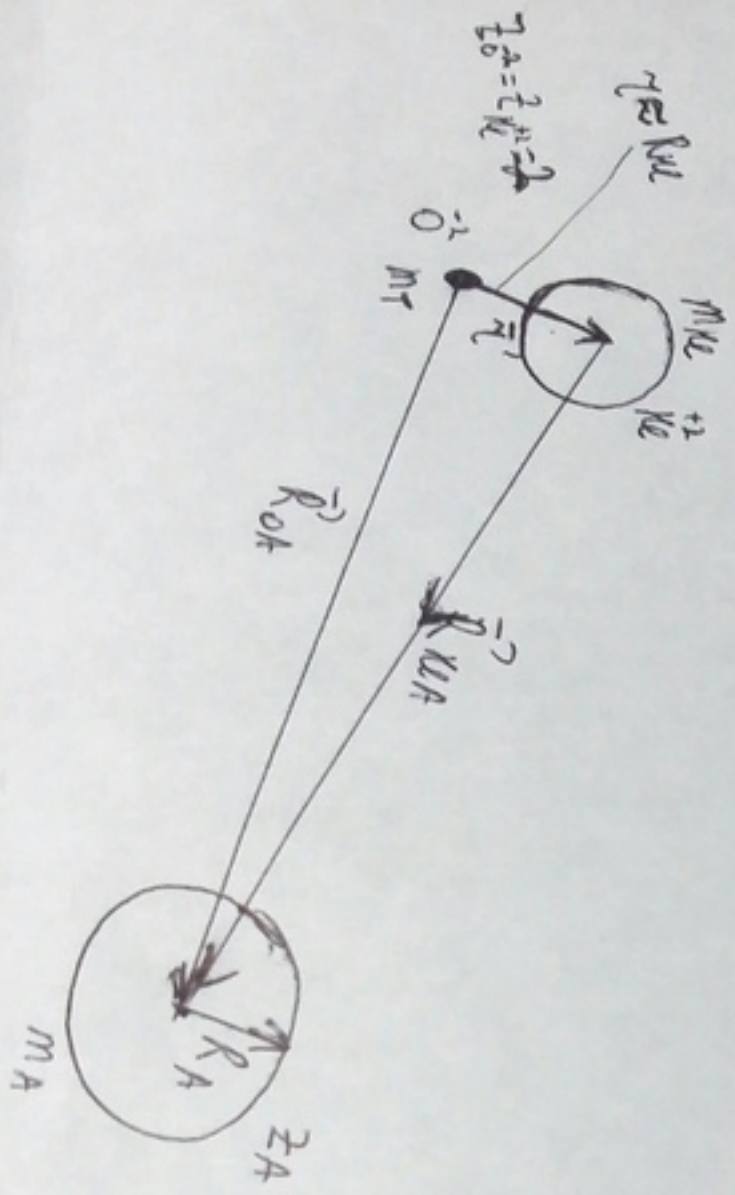




$$\begin{aligned} R_M &\gg R_T \\ m_T &\gg m_M \\ \tau &\approx R_M \end{aligned}$$

$$\vec{r}_1, R_{0A} - \text{negligierbar}$$

$$\vec{R}_{MA} = R_{0A} - \vec{r}_1$$



# Научно-исследовательская работа студента.

Бикбаев Тимур

Ноябрь 2018 г.

## 1 Разработка классической модели взаимодействия тёмных атомов с ядрами.

Рассмотрим задачу трёх тел. Дана система состоящая из двух взаимодействующих друг с другом частиц, движущихся во внешнем неоднородном электрическом поле, создаваемом третьей частицей, являющейся ядром элемента с зарядовым числом  $Z_A$ , приближающейся к данной системе.

Данная система является "тёмным" атомом, состоящим из отрицательно заряженной частицы  $O^{--}$  с зарядом  $-2e$  и ядра гелия  $He^{+2}$  с зарядом  $+2e$ .

На атом действует внешнее неоднородное электрическое поле с напряжённостью:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(\vec{\rho}) = \frac{Z_A e \vec{\rho}}{\rho^3},$$

где  $\rho$  это расстояние от источника напряжённости электрического поля до какой-то частицы,  $e$  это элементарный заряд.

Масса частицы  $O^{--}$   $m_T \gg m_{He}$  то есть намного больше массы ядра гелия.

Введём систему координат с началом в центре частицы  $O^{--}$ .

Гамильтониан атома, помещенного во внешнее электрическое поле, можно представить в виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}_\epsilon$$

где  $\hat{H}_0$  это гамильтониан изолированного (не подверженного внешним воздействиям) атома. Зная гамильтониан  $\hat{H}$ , можно записать уравнение Шрёдингера для атома, находящегося во внешнем электрическом поле напряженностью  $\vec{\epsilon}$ , и определить изменение энергии атома. Если поле  $\vec{\epsilon}$  слабое, то оператор  $\hat{U}_\epsilon$  является малой добавкой к  $\hat{H}_0$ . При этом собственные функции  $\psi$  и собственные значения  $E$  оператора  $\hat{H}$  мало отличаются от собственных функций  $\psi_0$  и собственных значений  $E_0$  гамильтониана  $\hat{H}_0$  невозмущенного атома.

Введём следующие вектора:  $\vec{r}$ ,  $\vec{R}_{OA}$  и  $\vec{R}_{HeA}$

где  $\vec{r}$  - вектор взаимного расстояния между частицей  $O^{--}$  и ядром гелия,  $\vec{R}_{OA}$  - радиус-вектор внешнего ядра, а  $\vec{R}_{HeA}$  это вектор проведённый из центра ядра гелия до центра внешнего ядра. Причём только  $\vec{r}$  и  $\vec{R}_{OA}$  являются независимыми, а  $\vec{R}_{HeA} = \vec{R}_{OA} - \vec{r}$ .

Запишем чему равны  $\hat{H}_0$  и  $\hat{U}_\epsilon$ :

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_{He}}\Delta_{r,\theta,\phi} + V_{OHe}(r) = -\frac{\hbar^2}{2m_{He}}\Delta_{r,\theta,\phi} - \frac{4e^2}{r}, \quad (1)$$

где  $V_{OHe}(r) = -\frac{4e^2}{r}$  кулоновский потенциал взаимодействия частицы  $O^{--}$  с ядром гелия,  $\hbar$  постоянная Планка,  $\Delta_{r,\theta,\phi}$  оператор Лапласа в котором дифференцирование производится по переменным  $r, \theta$ , и  $\phi$ .

$$\hat{U}_\epsilon = V_{OA}(R_{OA}) + V_{HeA}(R_{HeA}) + V_{\text{Multipole}}, \quad (2)$$

где  $V_{OA}(R_{OA})$  потенциал взаимодействия частицы  $O^{--}$  с внешним ядром,  $V_{HeA}(R_{HeA})$  потенциал взаимодействия ядра гелия с внешним ядром, который включает в себя как кулоновское взаимодействие, так и ядерное,  $V_{\text{Multipole}}$  потенциал взаимодействия внешнего ядра с мультиполем, который образуется в связи с тем, что в отсутствие внешнего электрического поля атомная система, имеет центр симметрии и среднее значение собственного дипольного момента у неё равно нулю, тогда как во внешнем электрическом поле атомная система приобретает индуцированный мультипольный момент.

$$V_{OA}(R_{OA}) = -\frac{2e^2 Z_A}{R_{OA}} \quad (3)$$

$$V_{HeA}(R_{HeA}) = \frac{2e^2 Z_A}{|\vec{R}_{OA} - \vec{r}|} - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{|\vec{R}_{OA} - \vec{r}| - R_A}{a}\right)}, \quad (4)$$

где  $R_A = r_0 A^{1/3}$  - радиус ядра;  $r_0 \approx 1,25$  фм, параметр, приближённо равный среднему расстоянию между нуклонами в ядре;  $A$  - массовое число ядра;  $a$  - параметр диффузности, характеризующий размытие края потенциальной ямы;  $V_0$  - глубина потенциальной ямы.

$$V_{\text{Multipole}} = \frac{2e^2 Z_A (\vec{r}\vec{e}_{R_{OA}})}{R_{OA}^2} + \frac{2e^2 Z_A r^2}{R_{OA}^3} + \frac{2e^2 Z_A (\vec{r}\vec{e}_{R_{OA}})^3}{R_{OA}^4} + \dots + \quad (5)$$

Найдём собственную функцию  $\psi$  оператора Гамильтона.

$\hat{H}\psi = E\psi$ , где  $E$  - это собственные значения оператора Гамильтона. Для этого нужно решить уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{He}}\Delta_{r,\theta,\phi}\psi - \frac{4e^2}{r}\psi - \frac{2e^2 Z_A}{R_{OA}}\psi + \frac{2e^2 Z_A}{\sqrt{R_{OA}^2 + r^2 - 2\vec{r}\vec{R}_{OA}}}\psi - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{|\vec{R}_{OA} - \vec{r}| - R_A}{a}\right)}\psi +$$

(6)

$$+ \left( \frac{2e^2 Z_A (\vec{r}\vec{e}_{R_{OA}})}{R_{OA}^2} + \frac{2e^2 Z_A r^2}{R_{OA}^3} + \frac{2e^2 Z_A (\vec{r}\vec{e}_{R_{OA}})^3}{R_{OA}^4} + \dots + \right) \psi = E\psi$$

$$\psi = \psi(r, \theta, \phi, R_{OA}) = R(r)Y(\theta, \phi)P(R_{OA}) \quad (7)$$

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} \quad (8)$$

$$\chi''YP + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} \right] \chi P + \frac{2m_{He}}{\hbar^2} \left[ E + \frac{4e^2}{r} + \frac{2e^2 Z_A}{R_{OA}} + \dots + \right] \chi Y P = 0$$

(9)